МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ
ТЕОРІЯ ОЦІНЮВАННЯ ТА СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів, які навчаються
за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Статистичні методи: Теорія оцінювання та статистичні гіпотези: Розрахункова робота [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Л. Д. Ярощук. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,72 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 64 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 21.06.2018 р.) за поданням Вченої ради Інженерно-хімічного факультету (протокол № 5 від 29.05.2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ
ТЕОРІЯ ОЦІНЮВАННЯ ТА СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

Укладач: *Ярощук Людмила Дем'янівна*, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний редактор: *Жученко А. І.,* завідувач кафедри «Автоматизація хімічних виробництв», доктор технічних наук, професор

Рецензент: *Сівецький Володимир Іванович,* к.т.н., професор кафедри хімічного, полімерного та силікатного машинобудування інженерно-хімічного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського

Запропонований навчальний посібник містить матеріал для виконання розрахункової роботи з методів дослідження технологічних об'єктів керування статистичними методами. Розглянуто задачі побудови емпіричної функції розподілу, гістограми, точкового та інтервального оцінювання параметрів нормального закону розподілу ймовірностей; визначення та перевірки суттєвості кореляційного зв'язку; ідентифікації об'єкта керування та аналізу властивостей отриманих регресійних моделей. Виконання завдань розрахункової роботи базується на експериментальному матеріалі. В посібнику наведено приклади виконання завдань в середовищі математичного процесора *MathCAD*.

Призначений для студентів спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» усіх форм навчання.

ЗМІСТ

ВСТУП

Математична статистика – це наука, яка створює раціональні прийоми обробки експериментальних даних, що належать до масових явищ і відображають вплив випадкових факторів.

Кредитний модуль «Теорія оцінювання та статистичні гіпотези» дисципліни «Статистичні методи» знайомить студентів з методами, які на основі спостережень дають можливість оцінити властивості та отримати математичну модель об'єкта та системи керування навіть при неповному знанні механізмів перебігу існуючих в них процесів.

Отримані моделі використовують в алгоритмах керування технологічними процесами для пошуку оптимальних режимів, прогнозування тощо.

У результаті вивчення кредитного модуля студент повинен

знати – методи дослідження стохастичних об'єктів і систем керування та визначення їхніх характеристик;

вміти:

- організовувати експериментальні дослідження на промислових об'єктах;
- розраховувати та будувати графічні зображення емпіричної функції розподілу та гістограми;
- розраховувати (оцінювати) параметри нормального закону розподілу ймовірностей випадкової величини (ВВ);
- визначати тісноту кореляційного взаємозв'язку між ВВ;
- отримувати математичні моделі шляхом обробки експериментальних даних.

Тому розрахункова робота має наступне спрямування – оцінювання параметрів випадкових величин та кореляційного зв'язку.

Мета та завдання розрахункової роботи, вимоги до оформлення

Метою виконання розрахункової роботи є закріплення знань, отриманих на лекціях та набуття умінь для виконання дослідження технологічних об’єктів та систем керування за результатами експериментів.

Основні задачі, які стоять перед розрахунковою роботою, наступні

- визначення властивостей емпіричних законів розподілу ймовірностей, зокрема точкових та інтервальних оцінок їх параметрів;
- дослідження тісноти кореляційних зв’язків між випадковими величинами;
- отримання та дослідження регресійних моделей технологічних об’єктів керування (ТОК);
- ознайомлення з засобами математичних процесорів щодо виконання трьох попередніх теоретичних питань.

Опис технології, що передує експериментальним даним, не повинен перевищувати 2 сторінки. Розрахунки треба проводити у середовищі спеціалізованої програми *MathCAD* (*MatLab* або *MS Excel* – за узгодженням з викладачем), що підтвердити зображеннями відповідних вікон програм.

При оформленні роботи керуватися наступним:

- властивості сторінки: папір А4, поля: ліве – 2,5 см, інші – 2 см;
- параметри форматування тексту: *Times New Roman*, 14 пт, 1,5 інтервали;
- нумерація сторінок наскрізна, знизу посередині, починаючи з 3-ї сторінки;

- нумерація рисунків, формул та таблиць (далі «об’єкт») за схемою: ***N*1.*N*2** (*N*1- номер завдання, *N*2 - номер об’єкту в тексті виконання конкретного завдання), наприклад, табл.3.1 – перша таблиця в третьому завданні, таким же чином для рисунку - рис.3.1, для формули - (3.1);
- текст пояснень виконувати у *MS Word*, результати розрахунків подавати фрагментами з документів *MathCAD*, (за вибором студента *MatLab* або *MS Excel*), позначаючи ці фрагменти як рисунки.

Завдання на розрахункову роботу

Описати технологічний об'єкт керування, стосовно якого будуть виконані дослідження. За результатами експериментів із цим об'єктом виконати наступні завдання.

1. Побудувати емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ та гістограму для двох технологічних змінних: вхідної, X та вихідної, Y.
2. Розрахувати вибіркові точкові оцінки математичних сподівань та дисперсій для X та Y, на зображення емпіричних функцій накласти графіки функцій, що відповідають нормальному закону розподілу ймовірностей.
3. Розрахувати інтервальні оцінки математичних сподівань та дисперсій для X та Y при довірчих імовірностях 95%.
4. Побудувати кореляційне поле для X та Y. Перевірити гіпотезу про суттєвість кореляційного зв'язку між ними при рівні значущості 5%.
5. Визначити регресійні моделі ТОК: лінійну – $y = a_0+a_1x$ та квадратичну – $y = a_0+a_1x + a_2 x^2$. Нанести відповідні функції на кореляційне поле.
6. Перевірити адекватність обох моделей.
7. Визначити точність моделей.
8. Проаналізувати властивості залишків лінійної моделі.
9. Визначити довірчі інтервали для параметрів лінійної моделі.
10. Перевірити однорідність залишкових дисперсій обох моделей і зробити висновок про доцільність застосування квадратичної моделі замість лінійної.

Примітка 1. Експериментальні дані повинні бути подані у вигляді таблиці.

№ досліду	X	Y
1	x_1	y_1

Примітка 2. Експериментальні дані для виконання пп. 1 – 3 повинні бути отримані за допомогою пасивного експерименту в околі значення фактора *X*, близького до середини діапазону можливих його значень згідно до технологічного регламенту процесу. Впродовж експерименту впливи на *X* неприпустимі, стан об'єкта повинен відповідати стаціонарному режиму.

Примітка 3. Експериментальні дані для виконання пп. 4 – 10 повинні бути отримані шляхом зміни *X*. Вимірювання *Y* треба виконувати при досягненні стаціонарного режиму процесу при кожному зі значень *X*.

Склад, обсяг і структура розрахункової роботи

Розрахункова робота подається у вигляді пояснювальної записки, яка містить текстову частину з описом технологічного об'єкта керування (не більше 2 сторінок), обґрунтуванням вибору випадкових величин, які будуть названі в подальшому *X* та *Y*, відповідних розрахунків та графіків. Значення *X* та *Y* подати у вигляді масивів (таблиць).

Склад роботи повинен відповідати пунктам завдання.

Обсяг роботи не повинен перевищувати 25 сторінок.

Згідно із наведеними вище завданнями на розрахункову роботу її структура повинна бути наступною:

Титульний аркуш

Завдання на розрахункову роботу.

Розрахунки і пояснення до них у відповідності з пунктами завдань.

Список використаної літератури.

Додатки (*за необхідністю*).

Теоретичні відомості та приклади виконання завдань

Завдання 1. ***Побудувати емпіричну функцію розподілу F*(x) та гістограму для двох технологічних змінних: вхідної, X та вихідної, Y.***

Емпіричним (статистичним) **розподілом** випадкової величини називають перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот, які спостерігались у вибірці експериментальних даних.

Використовуючи вибіркові дані, можна визначити емпіричну функцію розподілу, а також гістограму та полігон, які в певній мірі відображають функцію щільності розподілу. Позначимо через N_x кількість спостережень (варіант), при яких величини ознак (тобто значення X) були меншими за певне x, N – загальна кількість експериментальних даних.

Емпіричною функцією розподілу (ЕФР) називають функцію $F^*(x)$, яка для кожного значення x визначає відносну частоту події “$X<x$”:

$$F^*(x) = N_x / N.$$

Різниця між емпіричною $F^*(x)$ та теоретичною $F(x)$ функціями розподілу полягає в тому, що $F(x)$ визначає імовірність події “$X<x$”, а $F^*(x)$ характеризує відносну частоту цієї події.

При наявності експериментальних даних треба спочатку подати закон розподілу ймовірностей у вигляді таблиці. Її перший рядок міститиме значення випадкової величини, які спостерігалися в експерименті, а другий – частоти (N_i), або відносні частоти ($W_i = N_i/N$) появи цих значень (див. табл.1.1).

Табл. 1.1. Таблиця розподілу випадкової величини X

X	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_N
W	W_1	W_2	W_3	…	W_i	…	W_N

При упорядкуванні таблиці звичайно формують ***варіаційний ряд*** (***ряд розподілу***), тобто розташовують дані в порядку зростання. Отже, у наведеній табл.1.1 дотримані співвідношення $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_i \ldots \le x_N$. Для дискретної випадкової величини X, яка може приймати значення x_1, x_2,... , x_N, функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Нерівність $x_i < x$ означає, що підсумовування поширюється на ті значення x_i, які менше за x.

Побудуємо для прикладу функцію розподілу випадкової величини X, розподіл якої раніше було подано у вигляді таблиці. Функція розподілу має стрибки у тих точках, у яких випадкова величина приймає значення, вказані у ряді розподілу. В інтервалах між цими значеннями функція $F(x)$ – стала величина. Сума всіх стрибків функції дорівнює одиниці.

Розрахуємо значення $F(x)$:

$$F(x_1) = P(X < x_1) = 0;$$
$$F(x_2) = P(X < x_2) = P(X = x_1) = P_1;$$
$$F(x_3) = P(X < x_3) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = P_1 + P_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$F(x_N) = P(X < x_N) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_{N-1}) =$$
$$= P_1 + P_2 + \ldots + P_{N-1};$$

при $X > x_N$;

$$F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_{N-1}) + P(X = x_N) =$$
$$= P_1 + P_2 + \ldots + P_{N-1} + P_N = 1.$$

Графік функції розподілу дискретної випадкової величини – це розривна східчаста ламана лінія, вона подана на рис. 1.1.

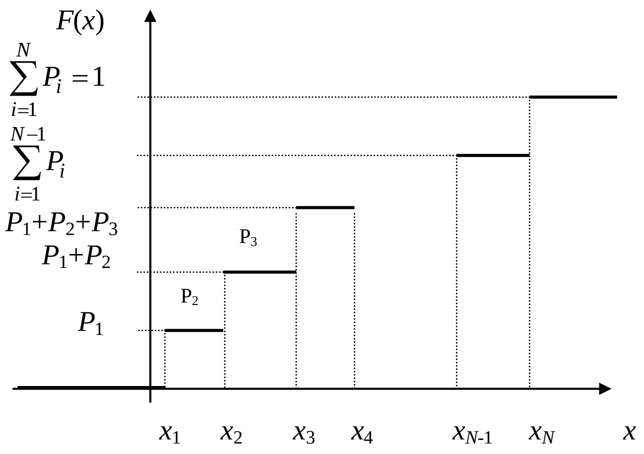

Рис. 1.1 Графік функції розподілу дискретної випадкової величини

Якщо розглядати навіть неперервну за природою випадкову величину, але подану таблично, то ЕФР будуватимемо так, як для дискретної ВВ.

Гістограмою частот називають східчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною Δ, а висоти дорівнюють відношенню N_i / Δ, яке називається щільністю частоти.

Гістограмою відносних частот називають східчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною Δ, а висоти дорівнюють W_i / Δ (щільність відносної частоти).

При побудові гістограми спочатку знаходять найменше і найбільше значення варіаційного ряду: x_{min} та x_{max}. Інтервал $[x_{min}, x_{max}]$, в якому містяться всі результати спостережень, розбивають на декілька часткових інтервалів, m довжиною Δ. Їх кількість визначають найчастіше за формулою Старджеса:

$$m = 1 + 3{,}322 \cdot \lg N;$$

отже довжину одиничного інтервалу визначають як

$$\Delta = (x_{\max} - x_{\min}) / (1 + 3{,}322 \cdot \lg N).$$

Початком першого інтервалу вважають величину $\delta_1 = x_{\min} - \Delta/2$, другого – $\delta_2 = \delta_1 + \Delta$, i – о інтервалу відповідно $\delta_i = \delta_{i-1} + \Delta$. Інтервали визначають доти, доки початок наступного інтервалу не перевищить x_{max}. Для кожного i -о часткового інтервалу знаходять N_i - кількість експериментальних даних, які потрапили до нього, а потім розраховують і відкладають по осі ординат щільність частоти (або відносної частоти в залежності від типу гістограми). Якщо інтервали мають різну довжину, то слід розглядати окремі Δ_i.

MathCAD має спеціальну функцію для побудови гістограм $hist(\delta, X)$. Результатом обчислень $hist(\delta, X)$ є вектор, кожний елемент якого дорівнює кількості вибіркових даних, значення яких належать відповідному інтервалу, тобто N_i. Параметр δ - вектор, в якому зберігаються граничні точки інтервалів. Розмірність вектора $hist(\delta, X)$ співпадає з розмірністю вектора δ і дорівнює кількості інтервалів. Визначивши необхідні складові $hist(\delta, X)$, можна отримати функцію $\varphi = hist(\delta, X)$.

Ця функція визначає кількість експериментальних значень у кожному інтервалі. Для отримання зображення гістограми треба скористатися діалоговим вікном побудови графіків **Формат/График/X-Y Зависимость** (*Formating/Currently Selected/X-Y Plot*) і його опцією **След**. Для побудови гістограми вибирають установку ***bar***.

На рис. 1.2 та 1.3. зображено приклади виконання завдання 1 у вигляді документів *MathCAD*. На рис. 1.2 ряд розподілу подано у вигляді матриці ***A***.

$ORIGIN := 1$

Створення матриці $A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$

Далі використовуємо інструмент програмування - Add Line (панель інструментів "Математика"->Програмування->Add Line, або Вид->Панели инструментов->Программирование->Add Line

$$F(x) := \left| \begin{array}{l} 0 \ \text{ if } -\infty < x < A_{1,1} \\ A_{2,1} \ \text{ if } A_{1,1} \le x < A_{1,2} \\ \left(\left(A_{2,1} + A_{2,2}\right)\right) \ \text{ if } A_{1,2} \le x < A_{1,3} \\ \left(\left(A_{2,1} + A_{2,2} + A_{2,3}\right)\right) \ \text{ if } A_{1,3} \le x < A_{1,4} \\ \left(\left(A_{2,1} + A_{2,2} + A_{2,3} + A_{2,4}\right)\right) \ \text{ if } A_{1,4} \le x < A_{1,5} \\ 1 \ \text{ if } A_{1,5} \le x < \infty \end{array} \right.$$

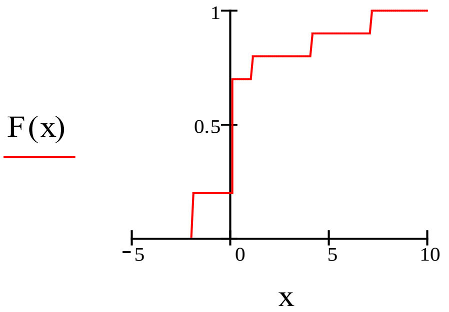

Рис.1.2. Документ *MathCAD* для визначення емпіричної функції розподілу

На рис.1.2. та 1.3 масиви експериментальних даних для X не вказано. Приклади починаються з формування варіаційних рядів (X^T).

$Xmax := max(x)$ $\quad Xmax = 1.219$ $\quad Xmin := min(x)$ $\quad Xmin = 0.831$

$x := sort(x)$

$x^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.831	0.905	0.932	0.953	0.956	0.988	1.004	1.056	1.081	1.219

$Rx := Xmax - Xmin$ $\quad Rx = 0.388$

$m := 1 + 3.322 \cdot \log(N)$ $\quad m = 4.322$

$m := floor(m)$ - ціла частина числа m , $m = 4$

$\Delta := \dfrac{Rx}{m}$ $\quad \Delta = 0.097$ - довжина одного інтервалу

$j := 1 .. m + 2$ $\quad \delta_j := Xmin + (2 \cdot j - 3) \cdot \dfrac{\Delta}{2}$ $\quad f := hist(\delta, x)$

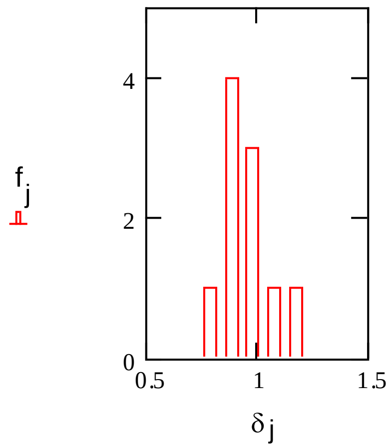

Рис.1.3. Документ *MathCAD* для побудови гістограми

<u>Завдання 2.</u> ***Розрахувати вибіркові точкові оцінки математичних сподівань та дисперсій для X та Y, на зображення емпіричних функцій накласти графіки функцій, що відповідають нормальному закону розподілу.***

Кожний закон розподілу ймовірностей випадкових чисел характеризується певними параметрами.

У таблиці 2.1 наведено функції щільності розподілу трьох законів і їхні параметри.

Таблиця 2.1 Приклади законів розподілу

Назва	Функції щільності розподілу	Параметри
Нормальний	$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$	$\mu_x,\ \sigma_x$
Рівномірний	$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\ x>b\\ \frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\end{cases}$	a,b
Показниковий	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$	λ

Визначити ці параметри кількісно можна було б, ґрунтуючись на результатах нескінченно великої кількості дослідів ($N \to \infty$). Така сукупність даних має назву *генеральної сукупності*. Вона є, звичайно, абстракцією.

Дослідник може мати справу із значно меншим набором даних, тобто $N<<\infty$. Цей набір даних називається *вибіркою з генеральної сукупності*, або просто *вибіркою*. Тому мова може йти про розрахунок наближених значень параметрів, які називають оцінками параметрів. Оцінки бувають точковими та інтервальними.

Точковою називають таку статистичну оцінку параметра, що визначають одним числом. Значення такої оцінки θ* невідомого параметра θ теоретичного розподілу, розраховують як функцію від спостережуваних випадкових величин x_1, x_2, ..., x_i, ..., x, ($x_i \in X$), отриманих у результаті N незалежних спостережень.

Найбільш характерним для неперервних технологічних об'єктів автоматизації є нормальний закон розподілу випадкових величин. Він характеризується двома параметрами – математичним сподіванням μ_x і дисперсією σ_x^2. Ці параметри є також основними числовими характеристиками випадкових величин й інших законів розподілу.

Нехай для вивчення генеральної сукупності випадкової величини X отримана вибірка обсягу N.

Вибіркова середня арифметична величина, M_x є незсуненою, обгрунтованою й ефективною оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності μ_x. Вона розраховується за формулою

$$M_x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}.$$

Дисперсія σ_x^2 характеризує розсіювання випадкової величини навколо математичного сподівання. Її значення розраховують як математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від математичного сподівання:

$$\sigma_x^2 = \mu[X - \mu_x]^2.$$

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, тому часто вживають інший параметр – середнє квадратичне (стандартне) відхилення, (СКВ), σ_x: $$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}.$$

Обґрунтованою та незсуненою є наступна точкова оцінка **дисперсії**:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - M_x)^2}{N-1}. \qquad (2.1)$$

Вибіркове СКВ розраховують як

$$S_x = \sqrt{S_x^2}. \qquad (2.2)$$

Розрахунки точкових оцінок параметрів засобами *MathCAD* можна виконувати або записуючі відповідні формули, або через стандартні функції. У табл.2.2 наведено відповідності між вказаними математичними виразами та стандартними функціями *MathCAD*.

Таблиця 2.2 Таблиця стандартних функцій *MathCAD*

Позначення	Формула
mean(*x*)	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
var(*x*)	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - M_x)^2$
Var(*x*)	$\frac{1}{(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - M_x)^2$
stdev(*x*)	$\sqrt{var(x)}$
Stdev(*x*)	$\sqrt{Var(x)}$

На рис. 2.1 наведено документ, у якому для розрахунку числових характеристик випадкових величин вжито стандартні функції *MathCAD*.

Робота з матрицями-рядками (чи матрицями-стовпцями)

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

середнє $\quad \mathrm{mean}(A) = 1.8$

медіана $\quad \mathrm{median}(A) = 1$

дисперсія $\quad \mathrm{var}(A) = 13.36$

середнє квадратичне відхиленняя $\quad \mathrm{stdev}(A) = 3.655$

Робота з матрицями типу N*M

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{mean}(A) = 1.9 \quad \mathrm{median}(A) = 1.5 \quad \mathrm{var}(A) = 6.29 \quad \mathrm{stdev}(A) = 2.508$

Рис. 2.1. Документ *MathCAD* з розрахунком числових характеристик випадкових величин

Mathcad має багату бібліотеку функцій роботи зі стандартними розподілами. Кожний розподіл може бути поданий трьома функціями – розподілу, щільності розподілу і функцією, оберненою до функції розподілу. Синтаксис кожної з них передбачає вживання на першому місці символів *p, d, q* відповідно, умовного позначення закону і в дужках певних аргументів (параметрів розподілу).

У загальному випадку запис такий:

– *d*<ідентифікатор закону>(*x*,параметри закону) – повертає значення функції щільності розподілу для значення випадкової величини, що дорівнює *x* і має вказані параметри закону розподілу;

– *p*<ідентифікатор закону>(*x*,параметри закону) - повертає значення функції розподілу;

– *q*<ідентифікатор закону>(*P*,параметри закону) - повертає значення випадкової величини при заданій імовірності *P* і параметрах розподілу.

Для отримання теоретичної функції розподілу *F*(*x*) у *MathCAD* існує стандартна функція *pnorm(x*,μ,σ). На рис. 2.2 наведено приклади нанесення емпіричної *F*(*x*) та теоретичної *F*1(*x*) функцій розподілу на площину одних і тих самих осей координат.

F1(x) := pnorm(x,89.32,10)

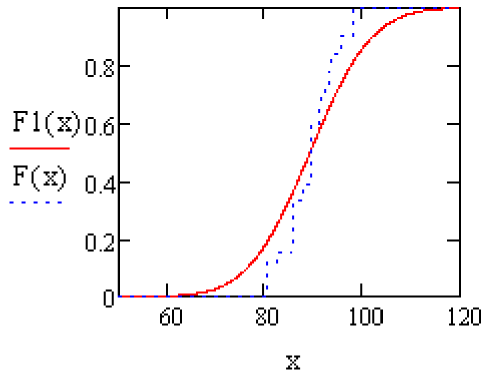

Рис. 2.2 Зображення емпіричної *F*(*x*) та теоретичної *F*1(*x*) функцій розподілу:

Завдання 3. ***Розрахувати інтервальні оцінки математичних сподівань та дисперсій для X та Y при довірчих імовірностях 95%.***

Інтервальною називають оцінку, що визначається двома числами – кінцями інтервалу. Інтервальні оцінки характеризуються також точністю та надійністю. За вибіркою малого обсягу точкова оцінка може значно відрізнятися від оцінюваного параметра, тобто приводити до грубих помилок. Із цієї причини при невеликому обсязі вибірки варто користуватися інтервальними оцінками.

Нехай знайдена за даними вибірки статистична характеристика θ* є точковою оцінкою невідомого параметра θ.

Ясно, що θ^* тим точніше визначає параметр θ, чим менша абсолютна величина різниці між ними, $|\theta - \theta^*|$.

Інакше кажучи, якщо є $\delta > 0$ і $|\theta - \theta^*| < \delta$, то чим менше δ, тим точніше оцінка. Таким чином, додатнє число δ характеризує ***точність оцінки.***

Однак статистичні методи не дозволяють категорично стверджувати, що оцінка θ^* задовольняє нерівності $|\theta - \theta^*|<\delta$, можна лише говорити про ймовірність P, з якою ця нерівність виконується.

Довірчою ймовірністю (***надійністю***) оцінки θ^* параметра θ називають імовірність P, з якою виконується нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$. Звичайно надійність оцінки задається наперед, причому за P беруть число близьке до 1. Найчастіше часто вибирають величини 0,95; 0,99; 0,999.

Нехай імовірність того, що $|\theta - \theta^*| < \delta$ дорівнює P:

$$P\left[|\theta-\theta^*|<\delta\right]=P.$$

Замінивши нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$ рівносильною їй подвійною нерівністю, тримаємо

$$\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta,$$

з чого маємо

$$P\left[\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta\right]=P.$$

Останній вираз треба розуміти так: імовірність того, що інтервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ містить у собі невідомий параметр θ, дорівнює P. Величину $\alpha = 1 - P$ називають ***рівнем значущості***.

Імовірність P характеризує ступінь довіри до даного інтервалу, у якому можуть розташовуватися значення випадкової величини. Рівень значущості α характеризує ризик того, що значення випадкової величини вийдуть за межі довірчого інтервалу.

Довірчим інтервалом називають інтервал (θ* – δ, θ* + δ), що покриває невідомий параметр із заданою довірчою ймовірністю *P*. Цей інтервал має випадкові кінці, їх називають ***довірчими границями***.

Інтервальна оцінка математичного сподівання. Нехай випадкова величина *X* розподілена нормально. Метод розрахунку оцінки залежить від того, чи відоме значення дисперсії випадкової величини *X* з теоретичних джерел чи з репрезентативної вибірки. Якщо воно відоме, то використовують функцію Лапласа.

Нехай відомо середнє квадратичне відхилення цього розподілу σ_x. Потрібно оцінити невідоме математичне сподівання μ_x за вибірковим середнім M_x і знайти довірчі інтервали, що включають параметр μ_x з довірчою ймовірністю *P*.

Для розрахунку використовують наступне співвідношення

$$P\left[\left|M_x-\mu_x\right|<\delta\right]=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{N}}{\sigma_x}\right)=2\Phi(b),$$

де $\Phi(b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^b e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функція Лапласа, *b* – аргумент функції Лапласа, У цьому випадку аргумент функції визначають за виразом

$$b=\frac{\delta\sqrt{N}}{\sigma_x}.$$

З останньої формули розрахуємо величину δ – точності оцінки:

$$\delta=b\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

і запишемо

$$P\left[\left|M_x-\mu_x\right|<b\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}\right]=2\Phi(b).$$

Взявши до уваги, що довірча ймовірність задана й дорівнює P, остаточно маємо

$$P[M_x - b\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} < \mu_x < M_x + b\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}] = 2\Phi(b) = P\,. \qquad (3.1)$$

Отже з надійністю P довірчий інтервал наступний

$$\left(M_x - b\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}},\ \ M_x + b\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \right). \qquad (3.2)$$

Аргумент b визначають з рівності $2\Phi(b) = P$, тобто $\Phi(b) = P/2$. За таблицею функції Лапласа знаходять аргумент b, якому відповідає значення функції Лапласа, що дорівнює $P/2$.

Таблицю функції Лапласа наведено у табл.Д1 Додатку1.

Приклад 3.1. Випадкова величина X має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma_x = 3$. Знайти довірчі інтервали для оцінки невідомого математичного сподівання μ_x за вибірковим середнім M_x, якщо обсяг вибірки $N = 36$ і довірча імовірність $P = 0{,}95$.

Розв'язок. Оскільки відоме $\sigma_x = 3$, то скористаємось функцією Лапласа. У цьому випадку довірчий інтервал розраховується за виразом (3.2).

$$2\hat{O}(b) = P = 0{,}95;\ \hat{O}(b) = 0{,}475;\ b = 1{,}96.$$

Знайдемо точність оцінки δ:

$$\delta = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{36}} = \frac{1{,}96 \cdot 3}{6} = 0{,}98.$$

Довірчий інтервал, таким чином, має наступні границі:

$$[M_x - 0{,}98,\ \ M_x + 0{,}98].$$

У тому разі, коли дисперсія апріорно не відома і можна розрахувати за вибірковими даними тільки її оцінку, довірчий інтервал визначають наступним чином

$$[M_x - t_{\alpha, N-1}\sqrt{\frac{S_x^2}{N}};\ M_x + t_{\alpha, N-1}\sqrt{\frac{S_x^2}{N}}], \qquad (3.3)$$

де $t_{\alpha, N-1}$ - табличне значення критерію Стьюдента, при рівні значущості α та N-1 степенях вільності для двосторонньої критичної області.

При заданому α визначають довірчу імовірність, як P=1-0,5α и по ній – значення критерію Стьюдента.

Таблицю критерію Стьюдента наведено у табл.Д2 Додатку2.

Замість використання статистичних таблиць можна скористатися вбудованими функціями *MathCAD* (див. табл. 3.1).

Приклад 3.2.

Нехай відомо, що випадкова величина X розподілена нормально. По вибірці обсягом N=16 знайдена вибіркова середня M_x = 20,2 і середнє квадратичне відхилення S_x = 0,8. Потрібно оцінити невідоме математичне сподівання генеральної сукупності за допомогою довірчого інтервалу з надійністю P=0,95.

Розв'язок. Знайдемо за таблицею значень двостороннього критерію Стьюдента величину t_{tabl}, використовуючи величини P = 0,95; (α = 0,05); k = 15. Критерій дорівнює t_{tabl} = 2,13. Якщо в розпорядженні є таблиця одностороннього критерію, то $\alpha = \frac{0,05}{2} = 0,025$. Якщо таблиця вимагає не α, а P, то P = 1 – 0,025 = 0,975.

Розрахуємо нижню і верхню границі довірчого інтервалу:

$$M_x - t_{tabl}\frac{S_x}{\sqrt{N}} = 20,2 - 2,13\frac{0,8}{\sqrt{16}} = 19,774;$$

$$M_x + t_{tabl}\,\frac{S_x}{\sqrt{N}} = 20{,}2 + 2{,}13\,\frac{0{,}8}{\sqrt{16}} = 20{,}626;$$

$$19{,}774 < \mu_x < 20{,}626.$$

Таблиця 3.1. Критерії для визначення інтервальних оцінок для *MathCAD*

Назва параметру	Довжина інтервалу	Табличний параметр		Функція *MathCAD*
		Позначення	Назва	
Математичне сподівання при відомому σ	$b\dfrac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$	b	Аргумент функції Лапласа	$qnorm(1-\alpha/2,0,1)$, $qnorm((1+P)/2,0,1)$
Імовірність події	bS_{W_A}	b	Аргумент функції Лапласа	Те саме
Коефіцієнт кореляції	$b\sigma_{r_{xy}}$	b	Те саме	– ″ –
Математичне сподівання при невідомому σ	$t_{tabl}\dfrac{S_x}{\sqrt{N}}$	t_{tabl}	Критерій Стьюдента	$qt(1-\alpha/2, N-1)$, $qt((1+P)/2, N-1)$
Дисперсія та середнє квадратичне відхилення	$\dfrac{NS_x^2}{\chi_2^2}$	χ_2^2	Критерій Пірсона	$qchisq(1-\alpha/2, N-1)$, $qchisq((1+P)/2, N-1)$
	$\dfrac{NS_x^2}{\chi_1^2}$	χ_1^2		$qchisq(\alpha/2, N-1)$, $qchisq((1-P)/2, N-1)$

На рис. 3.1. показано документ *MathCAD* з прикладом визначення довірчого інтервалу для μ_x при довірчій ймовірності P = 0,95.

$$\mathbf{P} := 0.95 \qquad \alpha := 1 - \mathbf{P} \qquad \mathbf{m} := 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\mathbf{t} := \mathbf{qt}(\mathbf{m}, \mathbf{N} - 1)$$

$$\mathbf{My} + \mathbf{t}\cdot\sqrt{\frac{\mathbf{Sy}}{\mathbf{N}}} = 100.34 \qquad \mathbf{My} - \mathbf{t}\cdot\sqrt{\frac{\mathbf{Sy}}{\mathbf{N}}} = 96.94$$

Рис. 3.1. Документ *MathCAD* з прикладом визначення довірчого интервалу для математичного сподівання при невідомому σ_x

Довірчий інтервал для ***дисперсії*** нормально розподіленої випадкової величини при відомому значенні її математичного сподівання μ_x і заданій довірчій імовірності P базується на тому, що випадкова величина $(N \cdot S_x^2)/\sigma_x^2$ має розподіл χ^2 (хі-квадрат, Пірсона) з k = N-1 степенями вільності і рівнем значущості α.

Таблицю критерію Пірсона наведено у табл.Д3 Додатку 3.

Визначивши довірчу ймовірність як P = 1-α, запишемо

$$P[\chi_1^2 < \frac{NS_x^2}{\sigma_x^2} < \chi_2^2] = 1 - \alpha . \qquad (3.4)$$

За таблицею χ^2 – розподілу треба вибрати такі значення χ_1^2та χ_2^2, при яких виконуються рівності:

$$P[\chi^2 < \chi_1^2] = P[\chi^2 > \chi_2^2] = \alpha/2. \qquad (3.5)$$

Таблиця χ^2 – розподілу (Додаток 3) подає тільки значення $P[\chi^2 > \chi_{k,\alpha}^2]$, тому для визначення $P[\chi^2 < \chi_1^2]$ використаємо таку залежність

$$P[\chi^2 < \chi_1^2] = 1 - P[\chi^2 > \chi_1^2].$$

Уведемо позначення:

$$P_1 = P[\chi^2 > \chi_1^2]; \; P_2 = P[\chi^2 > \chi_2^2].$$

Враховуючи останній вираз, рівність (3.4) запишемо так

$$P[\chi_1^2 < \frac{NS_x^2}{\sigma^2} < \chi_2^2] = P_1 - P_2 = 1 - \alpha . \qquad (3.6)$$

Тож, з огляду на (3.5) та (3. 6), розрахуємо P_1 та P_2:

$$P_1 = (1 - \alpha) + P_2 = 1 - \alpha + \alpha/2 = 1 - \alpha/2;$$

$$P_2 = P_1 - 1 + \alpha = 1 - \alpha/2 - 1 + \alpha = \alpha/2.$$

Перетворимо нерівність $\chi_1^2 < \dfrac{NS_x^2}{\sigma_x^2} < \chi_2^2$ у дві нерівності:

$$\frac{NS_x^2}{\chi_2^2} < \sigma_x^2 \text{ та } \frac{NS_x^2}{\chi_1^2} > \sigma_x^2,$$

які дозволяють визначити довірчий інтервал для дисперсії:

$$\frac{NS_x^2}{\chi_2^2} < \sigma_x^2 < \frac{NS_x^2}{\chi_1^2}.$$

Приклад 3.3. Визначити довірчий інтервал для дисперсії σ_x^2 випадкової величини X, розподіленої нормально з імовірністю $P = 0{,}95$ згідно з отриманою вибіркою $N = 20$, $S_x^2 = 10$.

Розв'язок. Визначимо наступні показники для $P = 0{,}95$:

- рівень значущості $\alpha = 1 - P = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$;
- імовірність $P_2 = \alpha/2 = 0{,}025$;
- імовірність $P_1 = 1 - \alpha/2 = 0{,}975$;
- кількість степенів вільності $k = N - 1 = 20 - 1 = 19$;

З таблиці χ^2 – розподілу для P_2 та $k = 19$ визначимо $\chi_2^2 = 32{,}852$, а для P_1 та $k = 19$ отримаємо $\chi_1^2 = 8{,}907$. Тепер запишемо

$$(20 \cdot 10)/32{,}852 < \sigma_x^2 < (20 \cdot 10)/8{,}907;$$
$$6{,}088 < \sigma_x^2 < 22{,}454.$$

На рис. 3.2 наведено документ *MathCAD* прикладом розрахунку інтервальних оцінок дисперсії та середнього квадратичного відхилення.

$P := 0.98 \qquad S2x := 10 \qquad N := 20$

S2n - нижня межа інтервалу дисперсії

$$\mathrm{qchisq}\left(\frac{1+P}{2}, N-1\right) = 36.191$$

$$S2n := \frac{S2x \cdot N}{\mathrm{qchisq}\left(\frac{1+P}{2}, N-1\right)} \qquad S2n = 5.526$$

S2w - верхня межа інтервалу дисперсії

$$\mathrm{qchisq}\left(\frac{1-P}{2}, N-1\right) = 7.633$$

$$S2w := \frac{S2x \cdot N}{\mathrm{qchisq}\left(\frac{1-P}{2}, N-1\right)} \qquad S2w = 26.203$$

dS2 - довжина інтервалу для дисперсії

$$dS2 := S2w - S2n \qquad dS2 = 20.677$$

Sn - нижня межа інтервалу середнього квадратичного відхилення

$$Sn := \sqrt{\frac{S2x \cdot N}{\mathrm{qchisq}\left(\frac{1+P}{2}, N-1\right)}} \qquad Sn = 2.351$$

Sw - верхня межа інтервалу середнього квадратичного відхилення

$$Sw := \sqrt{\frac{S2x \cdot N}{\mathrm{qchisq}\left(\frac{1-P}{2}, N-1\right)}} \qquad Sw = 5.119$$

dS - довжина інтервалу для середнього квадратичного відхилення

$$dS := Sw - Sn \qquad dS = 2.768$$

Рис. 3.2 Документ *MathCAD* з прикладом розрахунку інтервальних оцінок дисперсії та СКВ

Завдання 4. ***Побудувати кореляційне поле для X та Y. Перевірити гіпотезу про суттєвість кореляційного зв'язку між ними при рівні значущості 5%.***

Кореляційний зв'язок – це такий статистичний зв'язок між випадковими величинами, при якому зміна однієї з них призводить до зміни середнього значення іншої.

Тісноту зв'язку оцінюють за допомогою величини розсіювання значень Y навколо їх умовного середнього $M_{y|x}$. Значне розсіювання свідчить про слабку залежність Y від X або взагалі про її відсутність. Невелике розсіювання вказує на наявність достатньо сильної залежності. У цьому випадку величини Y та X можуть бути зв'язані навіть функціонально, але під впливом другорядних випадкових чинників цей зв'язок стає розмитим. У результаті при тому самому значенні X величина Y приймає різні значення.

Умовним середнім $M_{y|x}$ називають середнє арифметичне значення випадкової величини Y, що відповідають якомусь одному значенню випадкової величини X, наприклад, $X = x_1$. Рис.4.1 ілюструє поняття умовного середнього.

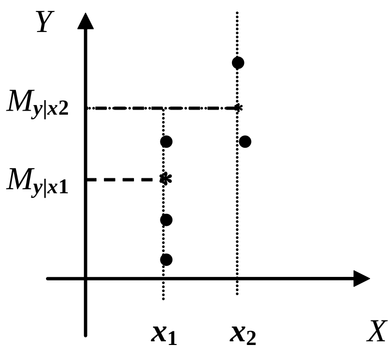

Рис.4.1 Графічна інтерпретація умовного середнього випадкової величини Y

Існує декілька показників, які оцінюють ті або інші сторони статистичного зв'язку. Одним із найбільш важливих є **коефіцієнт парної кореляції**. Цей коефіцієнт характеризує тісноту лінійного зв'язку між випадковими величинами X та Y.

Вибірковий коефіцієнт кореляції розраховують за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - M_x)(y_i - M_y)}{(N-1)\cdot S_x \cdot S_y}, \qquad (4.1)$$

де N - кількість пар даних X-Y.

Значення коефіцієнта r_{xy} можуть знаходитися в діапазоні $-1 \leq r_{xy} \leq 1$. Чим більше $| r_{xy} |$, тим сильніший лінійний зв'язок між змінними.

Значення $r_{xy} = 0$ свідчить або про відсутність будь-якої форми зв'язку, або про значну криволінійну залежність. Якщо $r_{xy} > 0$, то X та Y одночасно або убувають, або зростають. У випадку, коли $r_{xy} < 0$ одна величина убуває зі зростанням іншої. Якщо $| r_{xy} | = 1$, то X та Y пов'язані лінійною функціональною залежністю.

Отримати уяву про форму і тісноту зв’язку можна за допомогою кореляційних полів (див.рис. 4.2). **Кореляційним полем** називають зображення сукупності вибіркових значень двох змінних.

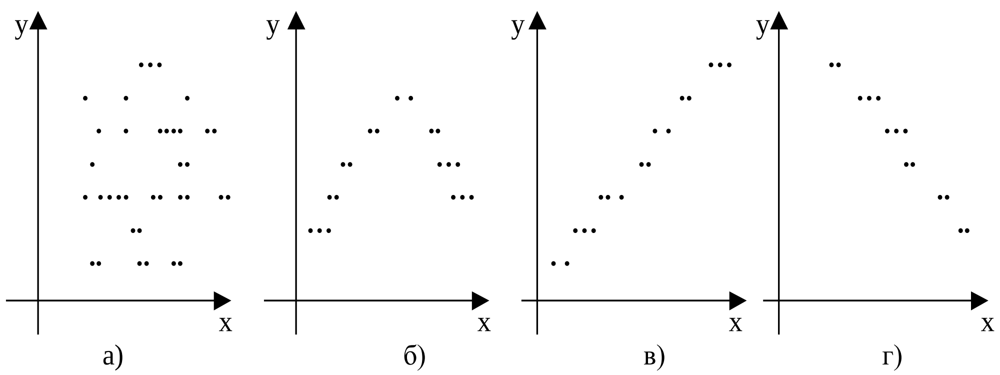

Рис. 4.2 Типи кореляційних полів:

а) відсутність будь-якої форми зв′язку; б) суттєвий нелінійний зв′язок;

в) зв′язок при $r_{xy} > 0$; г) зв′язок при $r_{xy} < 0$

На практиці замість розрахунку помилки коефіцієнта кореляції перевіряють гіпотезу про його значущість, тобто чи істотно r_{xy} відрізняється від нуля або цю відмінність можна приписати впливу випадковостей.

Сформулюємо статистичні гіпотези:

- основна $H_0:\ \rho = 0$,
- альтернативна $H_1:\ \rho = 0$,

де ρ - коефіцієнт парної кореляції, притаманний генеральній сукупності величин X та Y.

Вид альтернативної гіпотези H_1 свідчить про те, що розглядають двосторонню критичну область критерію Стьюдента, який використовують при перевірці H_0. При вибраному α треба або скористатися таблицею двостороннього критерію Стьюдента, або для таблиці одностороннього критерію прийняти $\alpha = \alpha / 2$.

Розрахункове значення критерію визначають за формулою

$$t = \frac{|r_{xy}|\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}.$$

Потім перевіряють умову

$$t < t_{N-2,\alpha}, \tag{4.2}$$

де $t_{N-2,\alpha}$ - табличне значення критерію при N-2 ступенях вільності та рівні значущості α.

Якщо умова (4.2) виконується, то гіпотезу H_0 приймають, тож зв’язок між випадковими величинами визнають не істотним.

Приклад 4.1. Нехай водневий показник pH рідини в баці і витрата одного з вхідних матеріальних потоків G підчас експериментів набували значень, наведених у табл.4.1. Розрахувати оцінку коефіцієнта парної кореляції між X та Y та оцінити тісноту лінійного зв'язку .

Табл.4.1 Експериментальні дані

$pH(Y)$	**6,7**	**6,9**	**7,2**	**7,3**	**8,4**	**8,8**	**9,1**	**9,8**	**10,6**	**10,7**	**11,1**	**11,8**	**12,1**	**12,4**
$G(X)$	**2,8**	**2,2**	**3,0**	**3,5**	**3,2**	**3,7**	**4,0**	**4,8**	**6,0**	**5,4**	**5,2**	**5,4**	**6,0**	**9,0**

Розв'язок.

$$M_y = \frac{6{,}7 + 6{,}9 + 7{,}2 + \ldots + 12{,}4}{14} = \frac{132{,}9}{14} = 9{,}49;$$

$$M_x = \frac{2{,}8 + 2{,}2 + 3{,}0 + \ldots + 9{,}0}{14} = \frac{64{,}2}{14} = 4{,}59;$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{14}\left(y_i - M_y\right)^2}{13}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(6{,}7 - 9{,}49)^2 + (6{,}9 - 9{,}49)^2 + (7{,}2 - 9{,}49)^2 + \ldots + (12{,}4 - 9{,}49)^2}{13}} =$$

$$= \sqrt{\frac{52{,}35}{13}} = \sqrt{4{,}03} \cong 2{,}01.$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{14}\left(x_i - M_x\right)^2}{13}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2{,}8 - 4{,}59)^2 + (2{,}2 - 4{,}59)^2 + (3 - 4{,}59)^2 + \ldots + (9 - 4{,}59)^2}{13}} =$$

$$= \sqrt{\frac{40{,}86}{13}} = \sqrt{3{,}14} \cong 1{,}77.$$

MathCAD має стандартну функцію *corr(X,Y)* для розрахунку коефіцієнта парної кореляції (*X,Y* – експериментальні дані, задані матрицями - рядками чи матрицями - стовпцями).

На рис. 4.3. подано документ *MathCAD* з кореляційним полем $X - Y$ та визначенням t та $t_{N-2,\alpha}$.

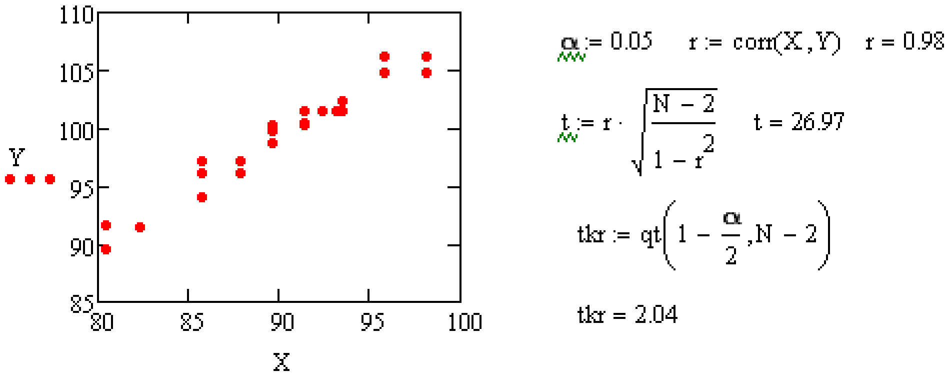

Рис. 4.3. Документ *MathCAD* з кореляційним полем $X - Y$ та визначенням t та $t_{N-2,\alpha}$

<u>Завдання 5.</u> ***Визначити регресійні моделі ТОК: лінійну*** $- y = a_0 + a_1 x$ ***та квадратичну*** $- y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$***. Нанести відповідні функції на кореляційне поле***.

У разі існування суттєвого кореляційного зв′язку між випадковими величинами доцільно визначити його форму, тобто, створити модель об′єкту. Цей етап кореляційного аналізу дуже важливий як при розробці систем керування технологічними процесами різних галузей виробництва, так і в інших сферах життєдіяльності людини. Його називають ***регресійний аналіз***.

Регресійний аналіз передбачає послідовне розв'язування наступних задач:

- створення математичної моделі об′єкту у вигляді регресійного рівняння за експериментальними даними;

- аналіз цієї моделі.

Кореляційною залежністю називають функціональну залежність умовної середньої *Y* від *X*:

$$M_y = f(x). \qquad (5.1)$$

Це рівняння називають *рівнянням регресії Y на X*; функцію $f(x)$ називають *регресією Y на X*, або *функцією відгуку*, її графік - *лінією регресії Y на X*.

Коли різноманітні значення *X* і відповідні їм значення *Y* спостерігалися по одноразово, немає потреби використовувати поняття умовної середньої, а тому шукане рівняння (5.1) можна записати так

$$\hat{y} = f(x), \qquad (5.2)$$

де $\hat{y}$ - величина *Y*, розрахована за моделлю.

В подальшому цю форму запису поширимо як загальну. Найбільш поширеними є поліноміальні моделі.

Приклади лінійних поліноміальних рівнянь наступні:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x; \qquad (5.3)$$

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_Kx_к.$$

Рівняння регресії можуть бути і нелінійними за формою, наприклад:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_1^2 + b_3x_2 + b_4x_1x_3;$$

$$\hat{y} = b_0 + b_1e^{x+1}.$$

Величини b_i називають **коефіцієнтами** (**параметрами**) регресії; чинники x_i, які формують множину значень X, називають **факторами.** Наприклад**,** x_1 – витрата реагента, x_2 – температура цього реагента на вході реактора. (**Увага**! Смисл x_i залежить від контексту завдання: якщо розглядають вплив лише одного чинника, який позначають X, то x_i – це значення цього чинника в i – у експерименті).

Розрахунок коефіцієнтів рівняння складає зміст ***параметричної ідентифікації*** моделі**.**

Для прикладу визначимо параметри лінійного регресійного рівняння (5.3). Для цього проведемо N незалежних дослідів, з яких отримаємо N пар чисел. Результати дослідів наведемо у формі таблиці (див.табл. 5.1).

Табл.5.1. Приклад подання експериментальних даних з одним чинником X

X	x_1	x_2	…	x_N
Y	y_1	y_2	…	y_N

Знайдені пари чисел можна розглядати як випадкову вибірку з генеральної сукупності всіх можливих значень випадкових величин X та Y. Рівняння регресії, які отримано за такими даними, називають *вибірковими*, а значення коефіцієнтів – *оцінками* параметрів регресії.

Розрахуємо оцінки параметрів (далі для спрощення виразів – параметри) b_0 і b_1 так, щоб сума квадратів відхилень значень, що спостерігаються (y_i), від розрахункових ($\hat{y}_i$) була мінімальною, тобто

$$Q(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - y_i)^2 \to min. \qquad (5.4)$$

Метод розрахунку b_0 і b_1, заснований на такій вимозі, називають **методом найменших квадратів.** Його застосування правочинне, якщо випадкові величини, між якими шукають зв'язок, підпорядковані нормальному закону розподілу ймовірностей.

Розкриємо $\hat{y}_i$ у наведеному вище функціоналі (5.4):

$$Q(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{N} (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2 \to min.$$

Для відшукання мінімуму функціонала $Q(b_0, b_1)$, прирівняємо його частинні похідні по b_0 і по b_1 до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{Q(b_0, b_1)}{\partial b_0} = 2\sum\limits_{i=1}^{N} (b_0 + b_1 x_i - y_i) = 0; \\ \dfrac{Q(b_0, b_1)}{\partial b_1} = 2\sum\limits_{i=1}^{N} (b_0 + b_1 x_i - y_i) \cdot x_i = 0. \end{cases}$$

Розкриємо знаки сум і винесемо коефіцієнти b_0 та b_1 за ці знаки:

$$\begin{cases} b_0 \cdot N + b_1 \sum\limits_{i=1}^{N} x_i - \sum\limits_{i=1}^{N} y_i = 0; \\ b_0 \sum\limits_{i=1}^{N} x_i + b_1 \sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{N} y_i x_i = 0. \end{cases}$$

Перенесемо за знаки рівностей управо члени рівнянь, що не містять коефіцієнтів (далі для зручності границі підсумовування опускаємо):

$$\begin{cases} b_0 \cdot N + b_1 \sum x_i = \sum y_i; \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 = \sum y_i x_i. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо параметри b_0 і b_1:

$$b_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2};$$

$$b_1 = \frac{\mathrm{N}\sum \mathrm{x_i} y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Приклад 5.1. Знайти параметри лінійного регресійного рівняння за даними п′яти (N=5) спостережень.

Розв′язок. Складемо розрахункову таблицю 5.2

Табл.5.2. Розрахункові дані до прикладу 5.1

X	Y	X^2	XY
1,0	1,25	1,0	1,250
1,5	1,40	2,25	2,100
3,0	1,50	9,0	4,500
4,5	1,75	20,25	4,875
5,0	2,25	25,00	11,250
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8{,}15$	$\sum x_i^2 = 57{,}50$	$\sum x_i y_i = 26{,}975$

Підставимо отримані дані у вирази для розрахунку параметрів:

$$b_0 = \frac{57{,}5 \cdot 8{,}15 - 15 \cdot 26{,}975}{5 \cdot 57{,}5 - 15^2} = 1{,}024;$$

$$b_1 = \frac{5 \cdot 26{,}975 - 15 \cdot 8{,}15}{62{,}5} = 0{,}202.$$

Запишемо шукане рівняння регресії:

$$\hat{y} = 1{,}024 + 0{,}202x.$$

Щоб з’ясувати, наскільки добре обчислені за цим рівнянням значення $\hat{y}_i$ узгоджуються з тими, які спостерігалися впродовж часу досліджень y_i, знайдемо відхилення $\hat{y}_i - y_i$.

Отримані розрахунки занесемо у табл. 5.3.

Табл.5.3. Дані для розрахунків точності моделі

X	$\widehat{Y}$	Y	$(\hat{Y}-Y)$
1,0	1,226	1,25	-0,024
1,5	1,327	1,40	-0,073
3,0	1,630	1,50	0,13
4,5	1,933	1,75	0,083
5,0	2,034	2,25	-0,216

Досить великі відхилення $(\hat{Y}-Y)$ пояснюються або малою кількістю спостережень, або нелінійною формою залежності між *Y* і *X*.

У *MathCAD* для обчислення параметрів одно факторних лінійних моделей b_0 і b_1 (див. 5.3) використовуються функції відповідно *intercept*(*X*,*Y*) і *slope*(*X*,*Y*). У дужках, параметрами вбудованих функцій, записують імена матриць з експериментальними даними. На рис. 5.1 подано документ *MathCAD* з результатами застосування цих функцій

```
b0 := intercept(X, Y)        b1 := slope(X, Y)

b0 = 17.09                   b1 = 0.91
```

Рис. 5.1. Документ *MathCAD* з результатами застосування функцій *intercept*(*x*,*y*) та *slope*(*x*,*y*)

Метод оцінювання параметрів *багатофакторної* чи *нелінійної* моделі аналогічний тому, який використовують для однофакторної моделі. Проблема тільки у тому, що розрахунки стають громіздкими. Тому переходять до матричної форми подання і отримання даних.

Оскільки спостереження за кожною змінною дає не одне, а декілька її значень, то зручно записувати кожний такий ряд за допомогою вектора, а сукупність всіх незалежних змінних – за допомогою двовимірної матриці.

Уведемо позначення, притаманні матричній формі запису:

$B = (b_j)$ – вектор оцінок параметрів;

$Y = (y_i)$ – вектор значень залежної змінної, $i = \overline{1, N}$;

$X = (x_{ij})$ – матриця значень незалежних змінних размірністю

$N \times M$, M – кількість незалежних змінних (факторів);

$$B = (X^{\text{ò}} X)^{-1} \cdot (X^{\text{ò}} Y). \qquad (5.5)$$

Матрицю X записують у вигляді

$$X = \begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{M1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{M2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{MN} \end{vmatrix} \qquad (5.6)$$

Таким чином, 1 - й рядок матриці X – це значення M вхідних змінних моделі у першому експерименті, N – й – у N - у експерименті.

Якщо досліджувати однофакторну квадратичну модель структури

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 ,$$

то матриця X матиме такий вигляд

$$X = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & \dots & \dots \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}$$

Матриця Y - це вектор-стовпець:

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{vmatrix}. \tag{5.7}$$

Документ *MathCAD* для визначення параметрів нелінійної моделі згідно з (5.5) наведено на рис. 5.2. Нанесені на один графік кореляційне поле і результати моделювання за лінійною і квадратичною однофакторними моделями наведено на рис. 5.3.

$$X1 := \begin{pmatrix} 1 & 80.45 & 80.45^2 \\ 1 & 82.35 & 82.35^2 \\ 1 & 80.45 & 80.45^2 \\ 1 & \dots & \dots \\ 1 & 85.78 & 85.78^2 \\ 1 & 89.60 & 89.60^2 \end{pmatrix}$$

$$B := \left(X1^T \cdot X1\right)^{-1} \cdot \left(X1^T \cdot Y\right)$$

$$B = \begin{pmatrix} -79.47 \\ 3.09 \\ -0.01 \end{pmatrix} \qquad Y2 := X1 \cdot B$$

Рис. 5.2. Документ *MathCAD* для визначення параметрів нелінійної моделі

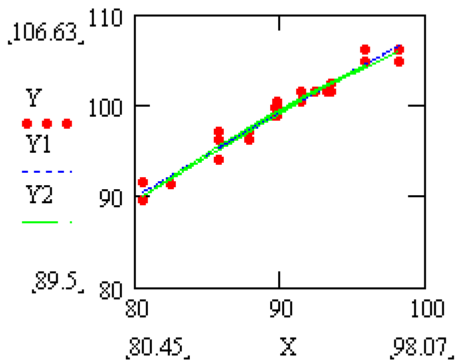

Рис. 5.3. Кореляційне поле і результати моделювання за лінійною і квадратичною однофакторними моделями

Завдання 6. ***Перевірити адекватність обох моделей.***

Після отримання регресійної моделі виконують її аналіз, зокрема перевіряють її **адекватність,** тобто відповідність її поведінки поведінці реального об’єкту. Тільки адекватну модель можна використовувати для дослідження властивостей об'єктів моделювання й оптимізації їх роботи.

Оцінка адекватності здійснюється на основі дисперсійного аналізу двома способами: порівнянням залишкової дисперсії або з дисперсією вихідної величини або з дисперсією відтворюваності у паралельних дослідах. У розрахунковій роботі передбачено використання першого способу. Згідно з ним параметрична ідентифікація і перевірка адекватності базуються на одній і тій самій вибірці випадкових величин *X* та *Y*.

Отже, треба порівняти такі дві дисперсії:

а) дисперсію, обумовлену розсіюванням значень Y навколо лінії регресії (*залишкова* дисперсія , ще – дисперсія *адекватності*) :

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum(\hat{y}_i - y_i)^2}{N - (M + 1)}, \qquad (6.1)$$

де S_{ad}^2 – дисперсія адекватності; M – кількість коефіцієнтів у моделі;

б) дисперсію випадкової величини Y відносно її середньої, S_y^2 (див.2.1).

Якщо між цими дисперсіями існує співвідношення $S_{ad}^2 \geq S_y^2$, то регресійну модель зразу варто визнати не адекватною експериментальним даним. У противному випадку треба перевірити основну (H_0) та альтернативну (H_1) гіпотези:

$$H_0 : \sigma_{ad}^2 = \sigma_y^2;$$

$$H_1 : \sigma_y^2 > \sigma_{ad}^2.$$

Для перевірки того, що S_{ad}^2 суттєво менша ніж S_y^2, використовують критерій Фішера.

Розрахункове значення критерію визначають наступним чином:

$$F = \frac{S_y^2}{S_{ad}^2}; \left\{ \frac{N-1}{N-(M+1)} \right\}.$$

$$F = \frac{\sum (y_i - M_y)^2 / (N-1)}{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 / (N-(M+1))}.$$

У фігурних дужках тут і далі вказані степені вільності дисперсій чисельника та знаменника, які треба використовувати при пошуку табличного значення критерію Фішера (див. табл.. Д4 Додатку 4).

Значення F показує, у скільки разів зменшується розсіювання експериментальних даних значення Y. Чим більше F перевищує $F > F_{N-1, N-(M+1), \alpha}$, тим ефективніша щодо отриманого рівняння в порівнянні з розсіюванням щодо середнього модель.

Якщо виконується співвідношення $F > F_{N-1, N-(M+1), \alpha}$, то гіпотезу H_0 відкидають, тобто модель можна вважати адекватною експериментальним даним.

Приклад 6.1. У табл. 6.1 наведено експериментальні дані (X – витрата продукту, Y – температура у технологічному апараті). Отримати регресійну модель і перевірити її адекватність.

Таблиця 6.1 Дані до задачі 6.1

№ п.п	Витрата продукту, X	Температура, Y	$\hat{y}$	$(y-\hat{y})^2$	$(y-M_y)^2$
1	79	28,0	27,79	0,04	18,84
2	70	21,0	19,44	2,43	7,08
3	80	27,7	28,72	1,25	15,52
4	71	16,2	20,37	17,37	55,65
5	77	29,7	25,94	14,17	36,48
6	77	26,8	25,94	0,75	9,86
7	84	30,2	32,43	4,55	44,09
8	66	15,7	15,73	0	63,36
9	74	25,5	23,15	5,51	3,39
10	67	15,8	16,66	0,73	61,78
Σ	745	236,6	160,94	46,73	316,05

Роз'язок. Побудуємо кореляційне поле (рис.6.1)

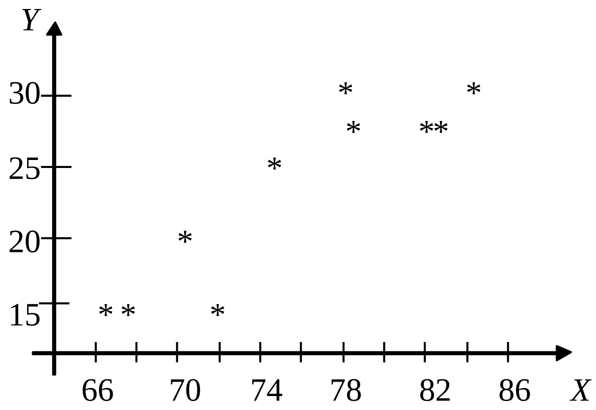

Рис. 6.1. Кореляційне поле до прикладу 6.1

Рис. 6.1 показує, що зв'язок близький до прямолінійного і можна використовувати лінійне рівняння регресії виду (5.3).

Скористаємось методом найменших квадратів.

$$\begin{cases} 10a + 745b = 236{,}6 & \Big| :10 \\ 745a + 55817b = 17917{,}7 & \Big| :745 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 74{,}5b = 23{,}66 \\ a + 74{,}92b = 24{,}05 \end{cases}$$

$$0{,}42b = 0{,}39;$$

$$b = 0{,}928\left[\frac{^0C}{кг/с}\right];.$$

$$236{,}6 = 10a + 745 \cdot 0{,}9286;$$

$$a = \frac{236{,}6 - 691{,}8}{10} = -45{,}52\left[^0C\right]$$

Регресійна модель процесу має вид

$$\hat{y} = -45{,}52 + 0{,}928x$$

Перевіримо адекватність цієї моделі. Розрахуємо спочатку дисперсію адекватності:

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_1^N (\hat{y}_i - y_i)^2}{N-2} = \frac{46{,}73}{10-2} = 5{,}84.$$

Визначимо дисперсію випадкової величини *Y*:

$$S_y^2 = \frac{\sum_1^N (y_i - M_y)^2}{N-1} = \frac{316{,}05}{10-1} = 35{,}1.$$

Оскільки $S_{ad}^2 < S_y^2$, то скористаємось критерієм Фішера

$$F = \frac{S_y^2}{S_{\grave{a}\ddot{a}}^2} = \frac{35{,}1}{5{,}84} = 6{,}01.$$

З'ясуємо табличне значення критерію Фішера при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$. Воно дорівнює $F_{9,8,0.05} = 3{,}39$.

Виконується умова $F > F_{9,8,0.05}$. Таким чином, модель об’єкта адекватна експериментальним даним.

На рис. 6.2. наведено документ *MathCAD* з прикладом, який ілюструє використання вбудованої функції по визначенню табличного значення критерію Фішера.

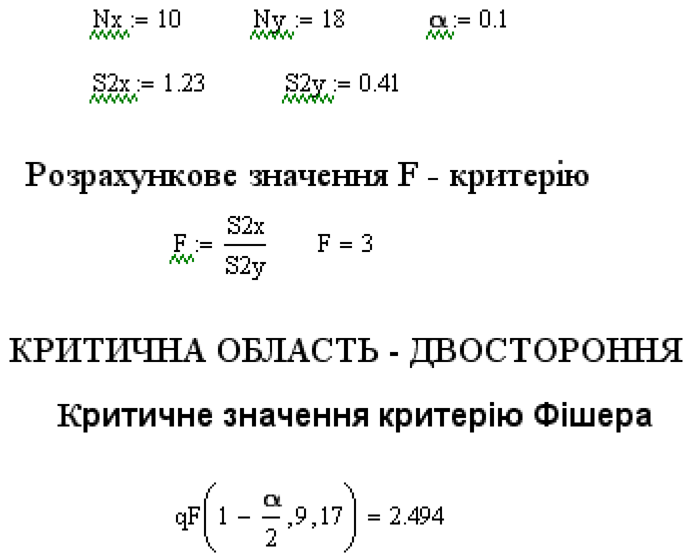

Рис. 6.2. Документ *MathCAD* з прикладом використання вбудованої функції для визначенню табличного значення критерію Фішера

Завдання 7. ***Визначити точність моделей***.

Точність моделі можна оцінити за наступними показниками:

- залишкова дисперсії, $K_1 = S_{ad}^2$;
- середнє значення квадратів відхилень розрахункових даних від експериментальних (на один експеримент):

$$K_2 = \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - y_i)^2 \Big/ N;$$

- середнє значення абсолютних відхилень розрахункових даних від експериментальних (на один експеримент)

$$K_2 = \sum_{i=1}^{N} |\hat{y}_i - y_i| \Big/ N.$$

Завдання 8. **Проаналізувати властивості залишків лінійної моделі.**

Аналіз моделі передбачає ще один етап – дослідження залишків δ_i, де $\delta_i = \hat{y}_i - y_i$. Треба вирахувати значення залишку для кожного експериментального значення x_i і перевірити умову: середнє значення залишків повинно наближатися до нуля. Крім цього будують кореляційне поле між x_i та δ_i. (див. рис. 8.1). Графік повинен показати, чи однаково розподілені залишки для різних значень фактора X.

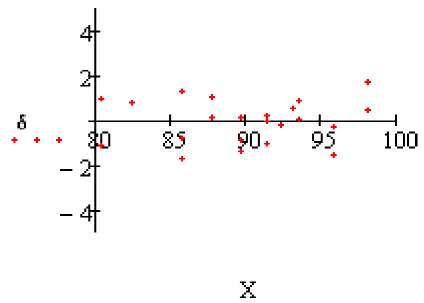

Рис. 8.1. Графік залишків

Якщо залишки рівномірно розташовані на всьому інтервалі експериментальних даних, то модель однаково точно відтворює об'єкт при різних рівня фактора *X*.

Завдання 9. ***Визначити довірчі інтервали для параметрів лінійної моделі.***

Перевірка значущості коефіцієнтів здійснюється за звичайною схемою перевірки статистичних гіпотез. Почнемо з b_0 і перевіримо гіпотези

$$H_0 : \beta_0 = 0;$$
$$H_1 : \beta_0 \neq 0,$$

де β_0 – дійсне значення параметра рівняння (отримане з генеральної сукупності, b_0 – його оцінка).

Статистичні висновки щодо коефіцієнта регресії b_i можуть бути отримані за допомогою критерію Стьюдента.

Розрахункове значення критерію визначають за формулою

$$t = \frac{|b_0 - 0|}{\sqrt{S_{b_0}^2}},$$

де $S_{b_0}^2$ – оцінка дисперсії коефіцієнта b_0, $\sigma_{b_0}^2$.

По визначенню $\sigma_{b_0}^2$:

$$\sigma_{b_0}^2 = M(b_0 - \beta_0)^2.$$

Можна довести, що дисперсію $\sigma_{b_0}^2$ визначають за виразом:

$$\sigma_{b_0}^2 \to S_{b_0}^2 = S_{ad}^2 \frac{\sum x_i^2}{\sum (x_i - M_x)^2}.$$

Перевірку значущості b_1 здійснюють аналогічно. Сформулюємо гіпотези

$$H_0 : \beta_1 = 0;$$
$$H_1 : \beta_1 \neq 0,$$

де β_1 – дійсне значення параметра рівняння (отримане з генеральної сукупності, b_1 – його оцінка).

Обчислимо статистику

$$t = \frac{|b_1 - 0|}{\sqrt{S_{b_1}^2}},$$

де $S_{b_0}^2$ – оцінка дисперсії коефіцієнта, $\sigma_{b_1}^2$.

По визначенню:

$$\sigma_{b_1}^2 = M(b_1 - \beta_1)^2,$$

можна перейти до наступного виразу

$$\sigma_{b_1}^2 \to S_{b_1}^2 = S_{ad}^2 \frac{1}{\sum (x_i - M_x)^2}.$$

У загальному випадку дисперсію параметра рівняння визначають, виходячи з виразу:

$$S_{b_i}^2 = C_{ii} S_{ad}^2,$$

де C_{ii} – відповідний діагональний елемент матриці $(X^T X)^{-1}$.

Табличне значення критерію визначають для (N – 2) ступенів вільності й рівня значущості α (використовуючи таблиці для двостороннього критерію), $t_{N-2,\alpha}$.

Якщо $t > t_{N-2,\alpha}$, то гіпотезу H_0 відкидають і визнають значущість коефіцієнта β_i. Довірчий інтервал для β_i обчислюють так

$$b_i - t_{N-2,\alpha} S_{b_i} \le \beta_i \le b_i + t_{N-2,\alpha} S_{b_i}.$$

Завдання 10. ***Перевірити однорідність залишкових дисперсій обох моделей і зробити висновок про доцільність застосування квадратичної моделі замість лінійної.***

Це завдання виконують для того, щоб визначитись у питанні зі структурою регресійної моделі. Якщо залишкова дисперсія квадратичної моделі суттєво менша за залишкову дисперсію лінійної моделі, тоді є смисл вибрати більш складну модель. Порівняння двох дисперсій треба виконати за критерієм Фішера. ***Нагадаємо, що розраховують цей критерій діленням більшої дисперсії на меншу***.

Порядок захисту та контрольні запитання

Захист розрахункової роботи відбувається після виконання усіх розділів завдання.

Студент підтверджує виконання завдань, наводячи відповідні дослідження та розрахунки з пояснювальної записки.

За вимогою викладача студент повинен показати своє вміння використовувати програму *MathCAD*.

Для підготовки до захисту розрахункової роботи студент повинен знати відповіді на наступні запитання:

1. Що таке закон розподілу ймовірностей випадкової величини?
2. Що таке емпіричний закон розподілу ймовірностей?
3. Як побудувати емпіричну функцію розподілу ймовірностей та гістограму дискретної випадкової величини?
4. Як побудувати емпіричну функцію розподілу та гістограму засобами *MathCAD*?
5. Що таке оцінка параметру?
6. Що таке точкова оцінка параметру? Знати формули розрахунків точкових оцінок математичного сподівання, дисперсії та стандартного відхилення.
7. Що таке інтервальна оцінка параметру? Чим вона характеризується?
8. Як визначити інтервальні оцінки математичного сподівання та дисперсії?
9. Які способи визначення точкових параметрів надає *MathCAD* ?
10. Дати визначення кореляційного зв’язку між величинами.
11. Що характеризує коефіцієнт парної кореляції? Як розраховувати його точкову оцінку?

12. Як визначити суттєвість кореляційного зв’язку?

13. Як визначити коефіцієнти парної та часткової кореляції у *MathCAD*?

14. Які задачі розв’язує регресійний аналіз?

15. Що таке фактори, а що – параметри моделі?

16. Який метод застосовують для розрахунку параметрів регресійної моделі при нормальному розподілі випадкових величин?

17. Як перевірити адекватність регресійної моделі при нормальному розподілі випадкових величин?

18. Як визначити точність моделі?

19. Як визначити довірчі інтервали для коефіцієнтів регресії?

20. У чому полягає дослідження залишків моделі?

21. Які способи проведення регресійного аналізу надають *MathCAD*?

Список рекомендованої літератури

1. **Жученко, А. І.** Оцінювання параметрів та перевірка статистичних гіпотез. Теорія та практика роботи з MathCAD, MatLab, MS Excel [Текст]: навч. посіб / А.І. Жученко, Л.Д. Ярощук – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – 156 с.
2. **Жученко, А. І**. Спеціальні розділи математики для дослідження комп′ютерних систем [Текст]: навч. посіб / А.І. Жученко, Л.Д. Ярощук – К.: Техніка, 1996. – 184с.
3. **Жлуктенко, В. І.** Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики [Текст]: навч. посіб. /: В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний. – К.: НМК, 1991. – 252с.
4. **Мармоза, А. Т.** Практикум по математической статистике [Текст]: учеб. пособие / А.Т. Мармоза. – К.: Выща шк., 1990. – 191 с.
5. **Новікова, Л. В.** Теорія ймовірностей і математична статистика [Текст]: навч. посіб. / Л.В. Новікова, Б.Д.Котляр, В.І. Бичков – К.: Техніка, 1996. – 184с.
6. **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей [Текст]: учеб. для вузов / Е. С. Вентцель. – М.: Высш.шк., 2001. – 575 с.
7. **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]:/ учебн.пособ. для вузов / В.Е Гмурман – М.: Высш. шк., 2000. – 479 с.
8. **Плис, А. И.** *Mathcad*: математический практикум для экономистов и инженеров [Текст]: учеб. пособие / А. И. Плис, П. А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с.

ДОДАТКИ

СТАТИСТИЧНІ ТАБЛИЦІ

Додаток 1.

Таблиця Д1. Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	Φ *(x)*	*x*	Φ*(x)*	*x*	Φ *(x)*	*x*	Φ *(x)*
0.00	0.0000	0.45	0.1736	0.90	0.3159	1.35	0.4115
0.01	0.0040	0.46	0.1772	0.91	0.3186	1.36	0.4131
0.02	0.0080	0.47	0.1808	0.92	0.3212	1.37	0.4147
0.03	0.0120	0.48	0.1844	0.93	0.3238	1.38	0.4162
0.04	0.0160	0.49	0.1879	0.94	0.3264	1.39	0.4177
0.05	0.0199	0.50	0.1^15	0.95	0.3289	1.40	0.4192
0.06	0.0239	0.51	0.1950	0.96	0.3315	1.41	0.4207
0.07	0.0279	0.52	0.1985	0.97	0.3340	1.42	0.4222
0.08	0.0319	0.53	0.2019	0.98	0.3365	1.43	0.4236
0.09	0.0359	0.54	0.2054	0.99	0.3389	1.44	0.4251
0.10	0.0398	0.55	0.2088	1.00	0.3413	1.45	0.4265
0.11	0.0438	0.56	0.2123	1.01	0.3438	1.46	0.4279
0.12	0.0478	0.57	0.2157	1.02	0.3461	1.47	0.4292
0.13	0.0517	0.58	0.2190	1.03	0.3485	1.48	0.4306
0.14	0.0557	0.59	0.2224	1.04	0.3508	1.49	0.4319
0.15	0.0596	0.60	0.2257	1.05	0.3531	1.50	0.4332
0.16	0.0636	0.61	0.2291	1.06	0.3554	1.51	0.4345
0.17	0.0675	0.62	0.2324	1.07	0.3577	1.52	0.4357
0.18	0.0714	0.63	0.2357	1.08	0.3599	1.53	0.4370
0.19	0.0753	0.64	0.2389	1.09	0.3621	1.54	0.4382
0.20	0.0793	0.65	0.2422	1.10	0.3643	1.55	0.4394
0.21	0.0832	0.66	0.2454	1.11	0.3665	1.56	0.4406
0.22	0.0871	0.67	0.2486	1.12	0.3686	1.57	0.4418
0.23	0.0910	0.68	0.2517	1.13	0.3708	1.58	0.4429
0.24	0.0948	0.69	0.2549	1.14	0.3729	1.59	0.4441
0.25	0.0987	0.70	0.2580	1.15	0.3749	1.60	0.4452
0.26	0.1026	0.71	0.2611	1.16	0.3770	1.61	0.4463
0.27	0.1064	0.72	0.2642	1.17	0.3790	1.62	0.4474
0.28	0.1103	0.73	0.2673	1.18	0.3810	1.63	0.4484
0.29	0.1141	0.74	0.2703	1.19	0.3830	1.64	0.4495
0.30	0.1179	0.75	0.2734	1.20	0.3849	1.65	0.4505
0.31	0.1217	0.76	0.2764	1.21	0.3869	1.66	0.4515
0.32	0.1255	0.77	0.2794	1.22	0.3883	1.67	0.4525

Продовження табл. Д1.

x	Ф *(x)*	*x*	Ф*(x)*	*x*	Ф *(x)*	*x*	Ф *(x)*
0.33	0.1293	0.78	0.2823	1.23	0.3907	1.68	0.4535
0.34	0.1331	0.79	0.2852	1.24	0.3925	1.69	0.4515
0.35	0.1368	0.80	0.2881	1.25	0.3944	1.70	0.4554
0.36	0.1406	0.81	0.2910	1.26	0.3962	1.71	0.4564
0.37	0.1443	0.82	0.2939	1.27	0.3980	1.72	0.4573
0.38	0.1480	0.83	0.2967	1.28	0.3997	1.73	0.4582
0.39	0.1517	0.84	0.2995	1.29	0.4015	1.74	0.4591
0.40	0.1554	0.85	0.3023	1.30	0.4032	1.75	0.4599
0.41	0.1591	0.86	0.3051	1.31	0.4049	1.76	0.4608
0.42	0.1628	0.87	0.3078	1.32	0.4066	1.77	0.4616
0.43	0.1664	0.88	0.3106	1.33	0.4082	1.78	0.4625
0.44	0.1700	0.89	0.3133	1.34	0.4099	1.79	0.4633
1.80	0.4641	2.00	0.4772	2.40	0.4918	2.80	0.4974
1.81	0.4649	2.02	0.4783	2.42	0.4922	2.82	0.4976
1.82	0.4656	2.04	0.4793	2.44	0.4927	2.84	0.4977
1.83	0.4664	2.06	0.4803	2.46	0.4931	.2.86	0.4979
1.84	0.4671	2.08	0.4812	2.48	0.4934	2.88	0.4980
1.85	0.4678	2.10	0.4821	2.50	0.4938	2.90	0.4981
1.86	0.4686	2.12	0.4830	2.52	0.4941	2.92	0.4982
1.87	0.4693	2.14	0.4838	2.51	0.4945	2.94	0.4984
1.88	0.4699	2.16	0.4846	2.56	0.4948	2.96	0.4985
1.89	0.4706	2.18	0.4854	2.58	0.4951	2.98	0.4986
1.90	0.4713	2.20	0.4861	2.60	0.4953	3.00	0.49865
1.91	0.4719	2.22	0.4868	2.62	0.4956	3.20	0.49931
1.92	0.4726	2.24	0.4875	2.64	0.4959	3.40	0.49966
1.93	0.4732	2.26	0.4881	2.66	0.4961	3.60	0.499841
1.94	0.4738	2.28	0.4887	2.68	0.4963	3.80	0.499928
1.95	0.4744	2.30	0.4893	2.70	0.4965	4.00	0.499968
1.96	0.4750	2.32	0.4898	2.72	0.4967	4.50	0.499997
1.97	0.4756	2.34	0.4904	2.74	0.4969	5.00	0.499997
1.98	0.4761	2.36	0.4909	2.76	0.4971		
1.99	0.4767	2.38	0.4913	2.78	0.4973		

Додаток 2

Таблиця Д2. Критичні значення *t*–критерію (Стьюдента)

Кількість степенів вільності *k*	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.697	2.042	2.457	2.75	3.385	3.646
31	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375	3.633
32	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
33	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356	3.611
34	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
35	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591
36	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
37	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326	3.574
38	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
39	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313	3.558
40	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
41	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301	3.544
42	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296	3.538
43	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291	3.532
44	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286	3.526
45	1.679	2.014	2.412	2.69	3.281	3.520
46	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277	3.515
47	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273	3.510
48	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269	3.505
49	1.677	2.010	2.405	2.68	3.265	3.500
50	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Продовження табл.Д2.

Кількість степенів вільності k	Рівень значущості α (двобічна критична область					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
51	1.675	2.008	2.402	2.676	3.258	3.492
52	1.675	2.007	2.400	2.674	3.255	3.488
53	1.674	2.006	2.399	2.672	3.251	3.484
54	1.674	2.005	2.397	2.670	3.248	3.480
55	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245	3.476
56	1.673	2.003	2.395	2.667	3.242	3.473
57	1.672	2.002	2.394	2.665	3.239	3.470
58	1.672	2.002	2.392	2.663	3.237	3.466
59	1.671	2.001	2.391	2.662	3.234	3.463
60	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
61	1.670	2.000	2.389	2.659	3.229	3.457
62	1.670	1.999	2.388	2.657	3.227	3.454
63	1.669	1.998	2.387	2.656	3.225	3.452
64	1.669	1.998	2.386	2.655	3.223	3.449
65	1.669	1.997	2.385	2.654	3.220	3.447
66	1.668	1.997	2.384	2.652	3.218	3.444
67	1.668	1.996	2.383	2.651	3.216	3.442
68	1.668	1.995	2.382	2.650	3.214	3.439
69	1.667	1.995	2.382	2.649	3.213	3.437
70	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
71	1.667	1.994	2.380	2.647	3.209	3.433
72	1.666	1.993	2.379	2.646	3.207	3.431
73	1.666	1.993	2.379	2.645	3.206	3.429
74	1.666	1.993	2.378	2.644	3.204	3.427
75	1.665	1.992	2.377	2.643	3.202	3.425
76	1.665	1.992	2.376	2.642	3.201	3.423
77	1.665	1.991	2.376	2.641	3.199	3.421
78	1.665	1.991	2.375	2.640	3.198	3.420
79	1.664	1.990	2.374	2.640	3.197	3.418
80	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
81	1.664	1.990	2.373	2.638	3.194	3.415
82	1.664	1.989	2.373	2.637	3.193	3.413
83	1.663	1.989	2.372	2.636	3.191	3.412
84	1.663	1.989	2.372	2.636	3.190	3.410
85	1.663	1.988	2.371	2.635	3.189	3.409
86	1.663	1.988	2.370	2.634	3.188	3.407
87	1.663	1.988	2.370	2.634	3.187	3.406
88	1.662	1.987	2.369	2.633	3.185	3.405
89	1.662	1.987	2.369	2.632	3.184	3.403
90	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
91	1.662	1.986	2.368	2.631	3.182	3.401
92	1.662	1.986	2.368	2.630	3.181	3.399
93	1.661	1.986	2.367	2.630	3.180	3.398
94	1.661	1.986	2.367	2.629	3.179	3.397
95	1.661	1.985	2.366	2.629	3.178	3.396
96	1.661	1.985	2.366	2.628	3.177	3.395
97	1.661	1.985	2.365	2.627	3.176	3.394
98	1.661	1.984	2.365	2.627	3.175	3.393
99	1.660	1.984	2.365	2.626	3.175	3.392
100	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.39
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Продовження табл.Д2.

Кількість степенів вільності *k*	Рівень значущості α (двобічна критична область					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
101	1.660	1.984	2.364	2.625	3.173	3.389
102	1.660	1.983	2.363	2.625	3.172	3.388
103	1.660	1.983	2.363	2.624	3.171	3.388
104	1.660	1.983	2.363	2.624	3.170	3.387
105	1.659	1.983	2.362	2.623	3.170	3.386
106	1.659	1.983	2.362	2.623	3.169	3.385
107	1.659	1.982	2.362	2.623	3.168	3.384
108	1.659	1.982	2.361	2.622	3.167	3.383
109	1.659	1.982	2.361	2.622	3.167	3.382
110	1.659	1.982	2.361	2.621	3.166	3.381
111	1.659	1.982	2.360	2.621	3.165	3.380
112	1.659	1.981	2.360	2.620	3.165	3.380
113	1.658	1.981	2.360	2.620	3.164	3.379
114	1.658	1.981	2.360	2.620	3.163	3.378
115	1.658	1.981	2.359	2.619	3.163	3.377
116	1.658	1.981	2.359	2.619	3.162	3.376
117	1.658	1.980	2.359	2.619	3.161	3.376
118	1.658	1.980	2.358	2.618	3.161	3.375
119	1.658	1.980	2.358	2.618	3.160	3.374
120	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
121	1.658	1.980	2.358	2.617	3.159	3.373
122	1.657	1.980	2.357	2.617	3.158	3.372
123	1.657	1.979	2.357	2.616	3.158	3.371
124	1.657	1.979	2.357	2.616	3.157	3.371
125	1.657	1.979	2.357	2.616	3.157	3.370
126	1.657	1.979	2.356	2.615	3.156	3.369
127	1.657	1.979	2.356	2.615	3.156	3.369
128	1.657	1.979	2.356	2.615	3.155	3.368
129	1.657	1.979	2.356	2.614	3.155	3.368
130	1.657	1.978	2.355	2.614	3.154	3.367
131	1.657	1.978	2.355	2.614	3.154	3.366
132	1.656	1.978	2.355	2.614	3.153	3.366
133	1.656	1.978	2.355	2.613	3.153	3.365
134	1.656	1.978	2.354	2.613	3.152	3.365
135	1.656	1.978	2.354	2.613	3.152	3.364
136	1.656	1.978	2.354	2.612	3.151	3.364
137	1.656	1.977	2.354	2.612	3.151	3.363
138	1.656	1.977	2.354	2.612	3.150	3.362
139	1.656	1.977	2.353	2.612	3.150	3.362
140	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149	3.361
141	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149	3.361
142	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149	3.360
143	1.656	1.977	2.353	2.611	3.148	3.360
144	1.656	1.977	2.353	2.61	3.148	3.359
145	1.655	1.976	2.352	2.61	3.147	3.359
146	1.655	1.976	2.352	2.61	3.147	3.358
147	1.655	1.976	2.352	2.61	3.147	3.358
148	1.655	1.976	2.352	2.609	3.146	3.357
149	1.655	1.976	2.352	2.609	3.146	3.357
150	1.655	1.976	2.351	2.609	3.145	3.357
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Додаток 3

Таблиця Д3. Критичні значення χ^2–критерію (Пірсона)

k	Імовірність, (%)								
	99,95	99,9	99,5	99,0	97,5	95,0	90,0	80,0	70,0
1	0,0393	0,0157	0,0393	0,0157	0,0982	0,0393	0,0158	0,0642	0,148
2	0,0100	0,0200	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713
3	0,0153	0,0243	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,005	1,424
4	0,0639	0,0908	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,649	2,195
5	0,158	0,210	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,343	3,000
6	0,299	0,381	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,070	3,828
7	0,485	0,598	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	3,822	4,671
8	0,710	0,857	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	4,594	5,527
9	0,972	1,153	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,380	6,393
10	1,265	1,479	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,179	7,267
11	1,587	1,834	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	6,989	8,148
12	1,934	2,214	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	7,807	9,034
13	2,305	2,617	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	8,634	9,926
14	2,697	3,041	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	9,467	10,821
15	3,108	3,483	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	10,307	11,721
16	3,536	3,942	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,152	12,624
17	3,980	4,416	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,002	13,531
18	4,439	4,905	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	12,857	14,440
19	4,912	5,407	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	13,716	15,352
20	5,398	5,921	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	14,578	16,266
21	5,896	6,447	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	15,445	17,182
22	6,404	6,983	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	16,314	18,101
23	6,924	7,529	9,260	10,196	11,688	13,091	14,848	17,187	19,021
24	7,453	8,085	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	18,062	19,943
25	7,991	8,649	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	18,940	20,867
26	8,538	9,222	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	19,820	21,792
27	9,093	9,803	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	20,703	22,719
28	9,656	10,391	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	21,588	23,647
29	10,227	10,986	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	22,475	24,577
30	10,804	11,588	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	23,364	25,508
31	11,389	12,196	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	24,255	26,440
32	11,979	12,811	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	25,148	27,373
33	12,576	13,431	15,815	17,073	19,047	20,867	23,110	26,042	28,307
34	13,179	14,057	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	26,938	29,242
35	13,788	14,688	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	27,836	30,178
36	14,401	15,324	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	28,735	31,115
37	15,020	15,965	18,586	19,960	22,106	24,075	26,492	29,635	32,053
38	15.644	16,611	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	30,537	32,992
39	16,273	17,262	19,996	21,426	23,654	25,695	28,196	31,441	33,932
40	16,906	17,916	20,707	22,164	24,453	26,509	29,051	32,345	34,872

Продовження табл.Д3.

k	Імовірність, (%)											
	60,0	50,0	40,0	30,0	20,0	10,0	5,0	2,5	1,0	0,5	0,1	0,05
1	0,275	0,455	0,708	1,074	1,642	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828	12,116
2	1,022	1,386	1,833	2,408	3,219	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816	15,202
3	1,869	2,366	2,946	3,665	4,642	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266	17,730
4	2,753	3,357	4,045	4,878	5,989	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467	19,997
5	3,655	4,351	5,132	6,064	7,289	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750	20,515	22,105
6	4,570	5,348	6,211	7,231	8,558	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458	24,103
7	5,493	6,346	7,283	8,383	9,803	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322	26,018
8	6,423	7,344	8,351	9,524	11,030	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,125	27,868
9	7,357	8,343	9,414	10,656	12,242	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877	29,666
10	8,295	9,342	10,473	11,781	13,442	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588	31,420
11	9,237	10,341	11,530	12,899	14,631	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264	33,136
12	10,182	11,340	12,584	14,011	15,812	18,549	21,026	23,336	26,217	28,300	32,909	34,821
13	11,129	12,340	13,636	15,119	16,985	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528	36,478
14	12,079	13,339	14,685	16,222	18,151	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123	38,109
15	13,030	14,339	15,733	17,322	19,311	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697	39,719
16	13,983	15,338	16,780	18,418	20,465	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252	41,308
17	14,937	16,338	17,824	19,511	21,615	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	40,790	42,879
18	15,893	17,338	18,868	20,601	22,760	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	42,312	44,434
19	16,850	18,338	19,910	21,689	23,900	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,820	45,973
20	17,809	19,337	20,951	22,775	25,038	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	45,315	47,498
21	18,768	20,337	21,991	23,858	26,171	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	46,797	49,010
22	19,729	21,337	23,031	24,939	27,301	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	48,268	50,511
23	20,690	22,337	24,069	26,018	28,429	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181	49,728	52,000
24	21,652	23,337	26,106	27,096	29,553	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558	51,179	53,479
25	22,616	24,337	26,143	28,172	30,675	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	52,620	54,947
26	23,579	25,336	27,179	29,246	31,795	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	54,052	56,407
27	24,544	26,336	28,214	30,319	32,912	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645	55,476	57,858
28	25,509	27,336	29,249	31,391	34,027	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993	56,892	59,300
29	26,475	28,336	30,283	32,461	35,139	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336	58,301	60,735
30	27,442	29,336	31,316	33,530	36,250	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	59,703	62,162
31	28,409	30,336	32,349	34,598	37,359	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003	61,098	63,582
32	29,376	31,336	33,381	35,665	38,466	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328	62,487	64,995
33	30,344	32,336	34,413	36,731	39,572	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648	63,870	66,402
34	31,313	33,336	35,444	37,795	40,676	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964	65,247	67,803
35	32,282	34,336	36,475	38,859	41,778	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275	66,619	69,199
36	33,252	35,336	37,505	39,922	42,879	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581	67,985	70,588
37	34,222	36,336	38,535	40,984	43,978	48,363	52,192	55,668	59,892	62,882	69,346	71,972
38	35,192	37,335	39,564	42,045	45,076	49,513	53,384	56,895	61,162	64,181	70,703	73,351
39	36,163	38,335	40,593	43,105	46,173	50,660	54,572	58,120	62,428	65,476	72,055	74,725
40	37,174	39,335	41,622	44,165	47,269	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766	73,402	76,095

Додаток 4

Таблиця Д5. Критичні значення F – критерію (Фішера) при α =5%
($k_{\textbf{більш}}$ – степені вільності дисперсії у чисельнику,
$k_{\text{менш}}$ – степені вільності дисперсії у знаменнику критерія)

$k_{\text{менш}}$	$k_{\text{більш}}$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385
3	10.128	9.5521	9.1172	9.1172	9.0135	8.9406	8.8868	8.8152	8.8103
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.1881	6.3560	6.1694	6.0043	6.0410	5.9988
5	6.6679	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2066	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8378	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8626	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3808	3.5319	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3513	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3661
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0380	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9751	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2103	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2782	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0848	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.24oo	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2540	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6803	2.4472	2.2900	2.1750	2.0867	2.0164	1.9588
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

Продовження табл.Д5.

$k_{менш}$	$k_{більш}$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,447	199,5	215,7073	224,5832	230,161	233,98	236,768	238,882	240,543	241,881
2	18,5128	19	19,1643	19,2468	19,2964	19,329	19,3532	19,371	19,3848	19,3959
3	10,128	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8867	8,8452	8,8123	8,7855
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631	6,0942	6,041	5,9988	5,9644
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725	4,7351
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2067	4,1468	4,099	4,06
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,866	3,787	3,7257	3,6767	3,6365
8	5,3177	4,459	4,0662	3,8379	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881	3,3472
9	5,1174	4,2565	3,8625	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789	3,1373
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,478	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204	2,9782
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,948	2,8962	2,8536
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964	2,7534
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144	2,671
14	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458	2,6022
15	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876	2,5437
16	4,494	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377	2,4935
17	4,4513	3,5915	3,1968	2,9647	2,81	2,6987	2,6143	2,548	2,4943	2,4499
18	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563	2,4117
19	4,3807	3,5219	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227	2,3779
20	4,3512	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,599	2,514	2,4471	2,3928	2,3479
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,366	2,321
22	4,3009	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419	2,2967
23	4,2793	3,4221	3,028	2,7955	2,64	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201	2,2747
24	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002	2,2547
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,603	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821	2,2365
26	4,2252	3,369	2,9752	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655	2,2197
27	4,21	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501	2,2043
28	4,196	3,3404	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,236	2,19
29	4,183	3,3277	2,934	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2783	2,2229	2,1768
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107	2,1646
40	4,0847	3,2317	2,8387	2,606	2,4495	2,3359	2,249	2,1802	2,124	2,0772
50	4,0343	3,1826	2,79	2,5572	2,4004	2,2864	2,1992	2,1299	2,0734	2,0261
60	4,0012	3,1504	2,7581	2,5252	2,3683	2,2541	2,1665	2,097	2,0401	1,9926
70	3,9778	3,1277	2,7355	2,5027	2,3456	2,2312	2,1435	2,0737	2,0166	1,9689
80	3,9604	3,1108	2,7188	2,4859	2,3287	2,2142	2,1263	2,0564	1,9991	1,9512
90	3,9469	3,0977	2,7058	2,4729	2,3157	2,2011	2,1131	2,043	1,9856	1,9376
100	3,9361	3,0873	2,6955	2,4626	2,3053	2,1906	2,1025	2,0323	1,9748	1,9267
110	3,9274	3,0788	2,6871	2,4542	2,2969	2,1821	2,0939	2,0236	1,9661	1,9178
120	3,9201	3,0718	2,6802	2,4472	2,2899	2,175	2,0868	2,0164	1,9588	1,9105
∞	3,8415	2,9957	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799	1,8307

Продовження табл.Д5.

$k_{менш}$	$k_{більш}$									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	242,9835	243,906	244,6898	245,364	245,9499	246,4639	246,9184	247,3232	247,6861	248,0131
2	19,405	19,4125	19,4189	19,4244	19,4291	19,4333	19,437	19,4402	19,4431	19,4458
3	8,7633	8,7446	8,7287	8,7149	8,7029	8,6923	8,6829	8,6745	8,667	8,6602
4	5,9358	5,9117	5,8911	5,8733	5,8578	5,8441	5,832	5,8211	5,8114	5,8025
5	4,704	4,6777	4,6552	4,6358	4,6188	4,6038	4,5904	4,5785	4,5678	4,5581
6	4,0274	3,9999	3,9764	3,9559	3,9381	3,9223	3,9083	3,8957	3,8844	3,8742
7	3,603	3,5747	3,5503	3,5292	3,5107	3,4944	3,4799	3,4669	3,4551	3,4445
8	3,313	3,2839	3,259	3,2374	3,2184	3,2016	3,1867	3,1733	3,1613	3,1503
9	3,1025	3,0729	3,0475	3,0255	3,0061	2,989	2,9737	2,96	2,9477	2,9365
10	2,943	2,913	2,8872	2,8647	2,845	2,8276	2,812	2,798	2,7854	2,774
11	2,8179	2,7876	2,7614	2,7386	2,7186	2,7009	2,6851	2,6709	2,6581	2,6464
12	2,7173	2,6866	2,6602	2,6371	2,6169	2,5989	2,5828	2,5684	2,5554	2,5436
13	2,6347	2,6037	2,5769	2,5536	2,5331	2,5149	2,4987	2,4841	2,4709	2,4589
14	2,5655	2,5342	2,5073	2,4837	2,463	2,4446	2,4282	2,4134	2,4	2,3879
15	2,5068	2,4753	2,4481	2,4244	2,4034	2,3849	2,3683	2,3533	2,3398	2,3275
16	2,4564	2,4247	2,3973	2,3733	2,3522	2,3335	2,3167	2,3016	2,288	2,2756
17	2,4126	2,3807	2,3531	2,329	2,3077	2,2888	2,2719	2,2567	2,2429	2,2304
18	2,3742	2,3421	2,3143	2,29	2,2686	2,2496	2,2325	2,2172	2,2033	2,1906
19	2,3402	2,308	2,28	2,2556	2,2341	2,2149	2,1977	2,1823	2,1683	2,1555
20	2,31	2,2776	2,2495	2,225	2,2033	2,184	2,1667	2,1511	2,137	2,1242
21	2,2829	2,2504	2,2222	2,1975	2,1757	2,1563	2,1389	2,1232	2,109	2,096
22	2,2585	2,2258	2,1975	2,1727	2,1508	2,1313	2,1138	2,098	2,0837	2,0707
23	2,2364	2,2036	2,1752	2,1502	2,1282	2,1086	2,091	2,0751	2,0608	2,0476
24	2,2163	2,1834	2,1548	2,1298	2,1077	2,088	2,0703	2,0543	2,0399	2,0267
25	2,1979	2,1649	2,1362	2,1111	2,0889	2,0691	2,0513	2,0353	2,0207	2,0075
26	2,1811	2,1479	2,1192	2,0939	2,0716	2,0518	2,0339	2,0178	2,0032	1,9898
27	2,1655	2,1323	2,1035	2,0781	2,0558	2,0358	2,0179	2,0017	1,987	1,9736
28	2,1512	2,1179	2,0889	2,0635	2,0411	2,021	2,003	1,9868	1,972	1,9586
29	2,1379	2,1045	2,0755	2,05	2,0275	2,0073	1,9893	1,973	1,9581	1,9446
30	2,1256	2,0921	2,063	2,0374	2,0148	1,9946	1,9765	1,9601	1,9452	1,9317
40	2,0376	2,0035	1,9738	1,9476	1,9245	1,9037	1,8851	1,8682	1,8529	1,8389
50	1,9861	1,9515	1,9214	1,8949	1,8714	1,8503	1,8313	1,8141	1,7985	1,7841
60	1,9522	1,9174	1,887	1,8602	1,8364	1,8151	1,7959	1,7784	1,7625	1,748
70	1,9283	1,8932	1,8627	1,8357	1,8117	1,7902	1,7708	1,7531	1,7371	1,7223
80	1,9105	1,8753	1,8445	1,8174	1,7932	1,7716	1,752	1,7342	1,718	1,7032
90	1,8967	1,8613	1,8305	1,8032	1,7789	1,7571	1,7375	1,7196	1,7033	1,6883
100	1,8857	1,8503	1,8193	1,7919	1,7675	1,7456	1,7259	1,7079	1,6915	1,6764
110	1,8767	1,8412	1,8101	1,7827	1,7582	1,7363	1,7164	1,6984	1,6819	1,6667
120	1,8693	1,8337	1,8026	1,775	1,7505	1,7285	1,7085	1,6904	1,6739	1,6587
∞	1,7887	1,7522	1,7202	1,6918	1,6664	1,6435	1,6228	1,6039	1,5865	1,5705

Продовження табл. Д5.

$k_{менш}$	$k_{більш}$									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	248,3094	248,5791	248,8256	249,0518	249,2601	249,4525	249,6309	249,7966	249,951	250,0951
2	19,4481	19,4503	19,4523	19,4541	19,4558	19,4573	19,4587	19,46	19,4613	19,4624
3	8,654	8,6484	8,6432	8,6385	8,6341	8,6301	8,6263	8,6229	8,6196	8,6166
4	5,7945	5,7872	5,7805	5,7744	5,7687	5,7635	5,7586	5,7541	5,7498	5,7459
5	4,5493	4,5413	4,5339	4,5272	4,5209	4,5151	4,5097	4,5047	4,5001	4,4957
6	3,8649	3,8564	3,8486	3,8415	3,8348	3,8287	3,823	3,8177	3,8128	3,8082
7	3,4349	3,426	3,4179	3,4105	3,4036	3,3972	3,3913	3,3858	3,3806	3,3758
8	3,1404	3,1313	3,1229	3,1152	3,1081	3,1015	3,0954	3,0897	3,0844	3,0794
9	2,9263	2,9169	2,9084	2,9005	2,8932	2,8864	2,8801	2,8743	2,8688	2,8637
10	2,7636	2,7541	2,7453	2,7372	2,7298	2,7229	2,7164	2,7104	2,7048	2,6996
11	2,6358	2,6261	2,6172	2,609	2,6014	2,5943	2,5877	2,5816	2,5759	2,5705
12	2,5328	2,5229	2,5139	2,5055	2,4977	2,4905	2,4838	2,4776	2,4718	2,4663
13	2,4479	2,4379	2,4287	2,4202	2,4123	2,405	2,3982	2,3918	2,3859	2,3803
14	2,3768	2,3667	2,3573	2,3487	2,3407	2,3333	2,3264	2,3199	2,3139	2,3082
15	2,3163	2,306	2,2966	2,2878	2,2797	2,2722	2,2652	2,2587	2,2525	2,2468
16	2,2642	2,2538	2,2443	2,2354	2,2272	2,2196	2,2125	2,2059	2,1997	2,1938
17	2,2189	2,2084	2,1987	2,1898	2,1815	2,1738	2,1666	2,1599	2,1536	2,1477
18	2,1791	2,1685	2,1587	2,1497	2,1413	2,1335	2,1262	2,1195	2,1131	2,1071
19	2,1438	2,1331	2,1233	2,1141	2,1057	2,0978	2,0905	2,0836	2,0772	2,0712
20	2,1124	2,1016	2,0917	2,0825	2,0739	2,066	2,0586	2,0517	2,0452	2,0391
21	2,0842	2,0733	2,0633	2,054	2,0454	2,0374	2,0299	2,0229	2,0164	2,0102
22	2,0587	2,0478	2,0377	2,0283	2,0196	2,0116	2,004	1,997	1,9904	1,9842
23	2,0356	2,0246	2,0144	2,005	1,9963	1,9881	1,9805	1,9734	1,9668	1,9605
24	2,0146	2,0035	1,9932	1,9838	1,975	1,9668	1,9591	1,952	1,9453	1,939
25	1,9953	1,9842	1,9738	1,9643	1,9554	1,9472	1,9395	1,9323	1,9255	1,9192
26	1,9776	1,9664	1,956	1,9464	1,9375	1,9292	1,9215	1,9142	1,9074	1,901
27	1,9613	1,95	1,9396	1,9299	1,921	1,9126	1,9048	1,8975	1,8907	1,8842
28	1,9462	1,9349	1,9244	1,9147	1,9057	1,8973	1,8894	1,8821	1,8752	1,8687
29	1,9322	1,9208	1,9103	1,9005	1,8915	1,883	1,8751	1,8677	1,8608	1,8543
30	1,9192	1,9077	1,8972	1,8874	1,8782	1,8698	1,8618	1,8544	1,8474	1,8409
40	1,826	1,8141	1,8031	1,7929	1,7835	1,7746	1,7663	1,7586	1,7513	1,7444
50	1,7709	1,7588	1,7475	1,7371	1,7273	1,7183	1,7097	1,7017	1,6942	1,6872
60	1,7346	1,7222	1,7108	1,7001	1,6902	1,6809	1,6722	1,6641	1,6564	1,6491
70	1,7088	1,6962	1,6846	1,6738	1,6638	1,6543	1,6455	1,6372	1,6294	1,622
80	1,6895	1,6768	1,6651	1,6542	1,644	1,6345	1,6255	1,6171	1,6092	1,6017
90	1,6745	1,6618	1,6499	1,6389	1,6286	1,619	1,61	1,6015	1,5935	1,5859
100	1,6626	1,6497	1,6378	1,6267	1,6163	1,6067	1,5976	1,589	1,5809	1,5733
110	1,6528	1,6399	1,6279	1,6167	1,6063	1,5966	1,5874	1,5788	1,5706	1,563
120	1,6447	1,6317	1,6197	1,6084	1,598	1,5881	1,5789	1,5703	1,5621	1,5543
∞	1,5558	1,542	1,5292	1,5173	1,5061	1,4956	1,4857	1,4763	1,4675	1,4591

Продовження табл. Д5.

$k_{менш}$	$k_{більш}$									
	40	50	60	70	80	90	100	110	120	∞
1	251,1432	251,7742	252,1957	252,4973	252,7237	252,9	253,0411	253,1566	253,2529	254,3143
2	19,4707	19,4757	19,4791	19,4814	19,4832	19,4846	19,4857	19,4866	19,4874	19,4957
3	8,5944	8,581	8,572	8,5656	8,5607	8,5569	8,5539	8,5514	8,5494	8,5265
4	5,717	5,6995	5,6877	5,6793	5,673	5,668	5,6641	5,6608	5,6581	5,6281
5	4,4638	4,4444	4,4314	4,422	4,415	4,4095	4,4051	4,4015	4,3985	4,365
6	3,7743	3,7537	3,7398	3,7298	3,7223	3,7164	3,7117	3,7079	3,7047	3,6689
7	3,3404	3,3189	3,3043	3,2939	3,286	3,2798	3,2749	3,2708	3,2674	3,2298
8	3,0428	3,0204	3,0053	2,9944	2,9862	2,9798	2,9747	2,9705	2,9669	2,9276
9	2,8259	2,8028	2,7872	2,776	2,7675	2,7609	2,7556	2,7512	2,7475	2,7067
10	2,6609	2,6371	2,6211	2,6095	2,6008	2,5939	2,5884	2,5839	2,5801	2,5379
11	2,5309	2,5066	2,4901	2,4782	2,4692	2,4622	2,4566	2,4519	2,448	2,4045
12	2,4259	2,401	2,3842	2,372	2,3628	2,3556	2,3498	2,345	2,341	2,2962
13	2,3392	2,3138	2,2966	2,2841	2,2747	2,2673	2,2614	2,2565	2,2524	2,2064
14	2,2664	2,2405	2,2229	2,2102	2,2006	2,1931	2,187	2,182	2,1778	2,1307
15	2,2043	2,178	2,1601	2,1472	2,1373	2,1296	2,1234	2,1183	2,1141	2,0659
16	2,1507	2,124	2,1058	2,0926	2,0826	2,0748	2,0685	2,0633	2,0589	2,0096
17	2,104	2,0769	2,0584	2,045	2,0348	2,0268	2,0204	2,0151	2,0107	1,9604
18	2,0629	2,0354	2,0166	2,003	1,9927	1,9846	1,978	1,9726	1,9681	1,9168
19	2,0264	1,9986	1,9795	1,9657	1,9552	1,947	1,9403	1,9348	1,9302	1,878
20	1,9938	1,9656	1,9464	1,9323	1,9217	1,9133	1,9066	1,901	1,8963	1,8432
21	1,9645	1,936	1,9165	1,9023	1,8915	1,883	1,8761	1,8705	1,8657	1,8117
22	1,938	1,9092	1,8894	1,8751	1,8641	1,8555	1,8486	1,8428	1,838	1,7831
23	1,9139	1,8848	1,8648	1,8503	1,8392	1,8305	1,8234	1,8176	1,8128	1,757
24	1,892	1,8625	1,8424	1,8276	1,8164	1,8076	1,8005	1,7946	1,7896	1,7331
25	1,8718	1,8421	1,8217	1,8069	1,7955	1,7866	1,7794	1,7734	1,7684	1,711
26	1,8533	1,8233	1,8027	1,7877	1,7762	1,7672	1,7599	1,7539	1,7488	1,6906
27	1,8361	1,8059	1,7851	1,77	1,7584	1,7493	1,7419	1,7358	1,7306	1,6717
28	1,8203	1,7898	1,7689	1,7535	1,7418	1,7326	1,7251	1,719	1,7138	1,6541
29	1,8055	1,7748	1,7537	1,7382	1,7264	1,7171	1,7096	1,7033	1,6981	1,6377
30	1,7918	1,7609	1,7396	1,724	1,7121	1,7027	1,695	1,6887	1,6835	1,6223
40	1,6928	1,66	1,6373	1,6205	1,6077	1,5975	1,5892	1,5824	1,5766	1,5089
50	1,6337	1,5995	1,5757	1,558	1,5445	1,5337	1,5249	1,5176	1,5115	1,4383
60	1,5943	1,559	1,5343	1,516	1,5019	1,4906	1,4814	1,4737	1,4673	1,3893
70	1,5661	1,53	1,5046	1,4857	1,4711	1,4594	1,4498	1,4419	1,4351	1,3529
80	1,5449	1,5081	1,4821	1,4628	1,4477	1,4357	1,4259	1,4176	1,4107	1,3247
90	1,5284	1,491	1,4645	1,4448	1,4294	1,4171	1,407	1,3985	1,3914	1,302
100	1,5151	1,4772	1,4504	1,4303	1,4146	1,402	1,3917	1,3831	1,3757	1,2832
110	1,5043	1,466	1,4388	1,4183	1,4024	1,3896	1,3791	1,3703	1,3628	1,2674
120	1,4952	1,4565	1,429	1,4083	1,3922	1,3792	1,3685	1,3595	1,3519	1,2539
∞	1,394	1,3501	1,318	1,2933	1,2735	1,2572	1,2434	1,2317	1,2214	1,0033